IDEAS ACERCA DE LOS CONCEPTOS DE DEMOSTRACION Y DE VERDAD MATEMATICA*

JAVIER LEGRIS

A partir de la práctica matemática, es natural pensar en algún tipo de conexión entre verdad y demostración, en el sentido de que es posible afirmar que un enunciado matemático es verdadero en virtud de que existe una demostración del mismo (tomando el término "demostración" en un sentido amplio, que, en una primera aproximación, incluya todo lo que los matemáticos acuerdan en considerar una demostración). Es así que se dice que las verdades matemáticas son afirmaciones demostradas. Al mismo tiempo, toda elucidación del concepto de verdad matemática debe basarse en alguna concepción acerca del significado de los enunciados empleados para expresar estas verdades. La cuestión es hallar una conexión satisfactoria entre los conceptos de demostración y significado, de modo que el concepto de demostración esté integrado en una teoría semántica.

El presente trabajo tiene como objetivo ofrecer una caracterización adecuada del concepto de verdad matemática, tal como surge de las ideas de Michael Dummett y de los defensores del llamado antirrealismo semántico. Para ellos la verdad de un enunciado, en general, depende de las condiciones para aseverarlo de manera correcta, lo cual viene a significar, en el caso específico de enunciados matemáticos, que su verdad depende de sus condiciones de demostración. La clave para cumplir el objetivo propuesto consiste en analizar el problema desde el punto de vista del conocimiento del significado. A lo largo de la exposición, se discutirán algunas tesis del antirrealismo semántico. En particular, se señalarán algunas limitaciones que surgen al querer generalizar esta concepción para enunciados cualesquiera, más allá del ámbito de la lógica y de la matemática.

Así, visto desde una perspectiva más amplia, el trabajo tocará algunos problemas clásicos, tales como la relación entre la verdad de un enunciado y el conocimiento de su verdad y el carácter informativo de los enunciados matemáticos. Ciertamente, se dará por supuesto que tiene sentido hablar de "conocimiento matemático".

* Este trabajo tiene su origen en la comunicación "Sobre el significado de los enunciados matemáticos", leída en una mesa redonda sobre el tema "Matemática y mundo" en el VII Congreso Nacional de Filosofía, Río Cuarto (Argentina), que tuvo lugar del 22 al 26 de noviembre de 1993. Agradezco los comentarios de los participantes de la mesa y de otros asistentes. Quiero agradecer también las observaciones de Alberto Moretti y del árbitro de *Análisis Filosófico*.

I

En su artículo sobre la verdad matemática, Paul Benacerraf estableció dos requisitos que debía cumplir toda teoría acerca de la verdad matemática: en primer lugar, estar de acuerdo con una teoría *general* acerca de la verdad y, en segundo lugar, ser consistente con la posibilidad del conocimiento matemático (Benacerraf 1983, pp. 408 y s.). El primer requisito afirma que las condiciones de verdad para enunciados matemáticos deben explicarse adecuadamente dentro de una teoría de la verdad. Por ejemplo, si el hecho de ser teorema de un sistema formal es condición para la verdad de un enunciado matemático, entonces debe explicarse la relación entre ser verdadero y el hecho de ser teorema de un sistema formal. El segundo requisito afirma que las condiciones de verdad para enunciados matemáticos no pueden hacer imposible el conocimiento de que esas condiciones son satisfechas, de modo que debe haber una conexión entre las condiciones de verdad de un enunciado y el conocimiento de su verdad.

Estos dos requisitos han motivado sendas aproximaciones al concepto de verdad matemática. De un lado, el realismo matemático ha conseguido analizar el concepto de verdad matemática en el marco de una teoría general de la verdad que la vincula con la referencia. Sin embargo, establece condiciones de verdad respecto de enunciados cuya verificación o refutación están más allá del conocimiento humano, con lo cual no puede darse cuenta, en general, de la relación entre verdad y conocimiento. (Y, claramente, esto es un problema si se acepta que todo enunciado verdadero debe ser cognoscible.) De otro lado, tanto el intuicionismo como el finitismo desarrollaron en su momento una concepción de la verdad matemática con la mirada puesta en las peculiaridades del conocimiento matemático, afirmando que la verdad de un enunciado se basa en los procedimientos que lo justifican, esto es, en demostraciones. No obstante, ninguno de los dos explicitó sus supuestos semánticos y no lograron enmarcar su enfoque en una concepción general acerca de la verdad y el significado (véase Benacerraf 1983, p. 419).

La aceptación de los requisitos mencionados tiene consecuencias en diversas áreas de la filosofía de la matemática, en particular en cuestiones relativas al conocimiento matemático. Este trabajo se ocupará de aquellas consecuencias que conciernen exclusivamente al significado de los enunciados matemáticos, en la presunción de que las condiciones de verdad de un enunciado deben elucidarse teniendo en cuenta las condiciones para demostrarlo.

II

Se le suele atribuir a Frege la tesis de la composicionalidad del significado, según la cual el significado de un enunciado es función del significado de las expresiones que lo componen. A veces, se suele incluir en esta tesis la afirmación de que los términos sólo tienen significado en el contexto de un enunciado. Además, una posición dentro de la tradición de Frege sostiene que la unidad lingüística básica de información son los enunciados, de modo que cada enunciado del lenguaje tiene un significado independiente. Esta posición ha sido denominada molecularismo semántico, por oposición al atomismo, según el cual los términos tienen un significado totalmente independiente, y al holismo, según el cual sólo en relación con el lenguaje entero tienen significado las expresiones.

Tanto la composicionalidad como el molecularismo se apoyan en argumentos de peso y constituyen incluso principios habituales en diferentes teorías semánticas. En la presente discusión se los dará también por supuestos, si bien mucho más decisivos para las conclusiones de ésta serán los dos siguientes principios vinculados con la comprensión lingüística.

En primer lugar, la comprensión del lenguaje consiste en el conocimiento del significado, y los problemas relativos al significado son mejor analizados como problemas acerca de la comprensión del lenguaje, ya que el significado de una expresión lingüística cualquiera debe ser conocido por el hablante, si la expresión es efectivamente comprendida por él. En segundo lugar, el conocimiento del significado debe ser —en última instancia— un conocimiento implícito, entendido como un conocimiento que se manifiesta en el uso que el hablante hace de las expresiones de un lenguaje.

Ambos supuestos están estrechamente vinculados, y una prueba a favor de ellos se encuentra en la manera en que los seres humanos adquieren el dominio de un lenguaje: al aprender una lengua, se aprende a hacer uso de sus expresiones. De acuerdo con el primero de estos supuestos, el problema de determinar el significado de una expresión pasa a ser el problema de determinar qué conoce un hablante cuando conoce el significado de esa expresión, y de acuerdo con el segundo, el conocimiento del significado de una expresión se manifiesta en determinadas habilidades que constituyen su uso correcto (véase Dummett 1976, pp. 69 y ss.). A su vez, este uso debe expresarse por medio de conductas observables. Estas ideas pueden verse como un desarrollo a partir del *dictum* wittgensteiniano de que “el significado de una expresión es su uso”, y de ellas se sigue, en general, que todas las características del uso correcto de una oración están determinadas por el significado de la misma, sea que se use para hacer afirmaciones (es decir, enunciados), preguntas, o para dar órdenes.

En este respecto, M. Dummett ha señalado la necesidad de identificar una única propiedad clave o central de las oraciones que permita especificar su significado, que esté de acuerdo con todos los supuestos semánticos mencionados y que sirva para caracterizar la práctica lingüística (véase Dummett 1973, pp. 222 y s.). Por ejemplo, en el caso de las oraciones compuestas, la especificación de esa propiedad debe hacerse en base a cómo se da en cada oración simple que la compone. Esta necesidad de una única propiedad clave para el significado cumplirá en lo que sigue la función de un supuesto adicional.

En suma, se tienen hasta aquí cinco supuestos que entrarán en juego en la discusión: la tesis de la composicionalidad, el molecularismo semántico, el nexó esencial entre significado y comprensión lingüística, el conocimiento del significado como conocimiento implícito y la necesidad de un único concepto para elucidar el significado. Los tres últimos supuestos son los decisivos.

III

Frege vio en el concepto de verdad la propiedad central para determinar el significado de un enunciado (entendiendo "significado" como "Bedeutung"; el *locus* clásico es su artículo "Über Sinn und Bedeutung"). Esto sirvió posteriormente de base para afirmar que el significado de un enunciado está dado por sus condiciones de verdad y que conocer el significado de un enunciado es conocer las condiciones de verdad del mismo. Así formulada, esta concepción del significado parece satisfacer los supuestos recién apuntados. En efecto, bajo el supuesto de que el conocimiento del significado de un enunciado cualquiera *p* sea explicitable, es decir, pueda formularse en otro lenguaje comprendido de antemano, el uso que manifiesta el conocimiento del significado puede expresarse por medio de la instancia de la forma T de Tarski: "*p* es verdadero si y sólo si A", donde A es un enunciado del lenguaje ya comprendido.

Sin embargo, esta elucidación del significado mediante condiciones de verdad se ha dado conjuntamente con una concepción *clásica* de la verdad, que sostiene la tesis de que las condiciones de verdad se cumplen o no se cumplen, es decir, están siempre determinadas. Esto es lo que se conoce como principio semántico de bivalencia, el cual constituye una de las tesis centrales del llamado realismo semántico.

Es justamente esta tesis la que trae problemas al ser analizada en relación con el conocimiento del significado. Por los supuestos tercero y cuarto mencionados anteriormente, debe ser posible conocer el significado de un enunciado y ese conocimiento debe manifestarse en la capacidad de reconocer que

las condiciones de verdad se cumplen. De aquí se sigue que, en el caso específico de enunciados matemáticos, si su significado se identifica con sus condiciones de verdad, entonces debería ser posible reconocer que las condiciones de verdad se cumplen cada vez que éstas efectivamente se cumplen. Pero es sabido que hay casos en los que esto no es así, pues existen enunciados a los que el realista debe adscribirles un valor de verdad, si bien su verdad o falsedad no puede ser reconocida. (Obviamente, el conocimiento de las condiciones de verdad de un enunciado no implica conocer si esas condiciones se cumplen o no.) Más específicamente, en virtud del cuarto supuesto, su significado debería quedar claramente especificado en el uso, esto es, en la capacidad para hacer una aseveración correcta con él siempre que sus condiciones de verdad se cumplan, lo cual implica la determinación de un método para demostrarlos. Tal es el caso de enunciados indecibles como, por ejemplo, la conjetura de Goldbach ("Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos"), para los cuales no ha sido posible, hasta ahora, encontrar una demostración o una refutación y que son, además, auténticos enunciados con significado. Es decir, se conocen sus condiciones de verdad, pero no si éstas se cumplen o no. (Véase Legris 1994, pp. 81 y ss. Obviamente, el problema no se presenta si uno se limita a enunciados decidibles.)

En otras palabras, el realista semántico acepta la existencia de enunciados con condiciones de verdad determinadas, aun si estas condiciones no pueden conocerse. De aquí se sigue una segunda tesis del realismo semántico (o, según cómo se vea, una reformulación de la primera), según la cual las condiciones de verdad de un enunciado se cumplen independientemente de que pueda saberse o no que se cumplen (véase Dummett 1963, p. 146). En este punto, puede observarse, antes que nada, una falta de conexión entre la verdad de un enunciado matemático y el modo en que esta verdad es conocida. También da lugar a que se afirme la existencia de enunciados cuyo significado es incognoscible y, por lo tanto, cuyo uso no es manifiesto.

En suma, si el conocimiento del significado debe manifestarse en el uso a través de conductas observables, entonces la concepción realista de la verdad matemática se vuelve incompleta, si no inaceptable, como elucidación del significado, y el concepto clásico de verdad no puede ser el concepto central para determinar el significado de los enunciados matemáticos.

IV

Al buscar una alternativa para el concepto clásico de verdad, cabe tener presente que los enunciados se usan para hacer aseveraciones correctas. En el caso de la matemática, este uso se evidencia por medio de demostraciones: sa-

ber usar un enunciado matemático es saber demostrarlo (o reconocer una demostración) y, además, saber demostrar otros enunciados a partir de él. De aquí, puesto que el significado de un enunciado matemático se manifiesta en su uso, el conocimiento de su significado se manifiesta en la capacidad para dar o reconocer una demostración correcta del mismo (o el método para construirla), es decir, el conocimiento de su significado es el conocimiento de las condiciones para su (posible) demostración.

Es así como el concepto de *demostración* aparece como un buen candidato para ser el concepto central de una teoría del significado. Esta es la tesis que Dummett ha sostenido —con algunas variaciones— en reiteradas oportunidades (véanse Dummett 1959, pp. 17 y ss.; 1963, p. 153, y, sobre todo, 1973, pp. 225, pero también 1991, pp. 176 y ss.). Según Dummett, la tesis recibe fuerte apoyo en el aprendizaje de la matemática. Al aprender el lenguaje matemático se aprende a reconocer qué se considera una demostración correcta de todos sus enunciados, y es esta capacidad de reconocimiento lo que vale como comprensión del significado.

Aquí debe entenderse por demostración tanto un mero cómputo, en el caso de enunciados simples, como una derivación a partir de otros enunciados, en el caso de enunciados compuestos. Es así como el concepto de demostración también da cuenta del significado de enunciados que incluyen constantes lógicas, elucidando el significado de estas últimas en términos de las condiciones para la posible demostración de los enunciados que las contienen.

Al entender la verdad como demostración, ésta pasa a ser el concepto clave para elucidar el significado, lo cual trae como consecuencia el abandono del principio de bivalencia, pues, respecto de enunciados indecidibles, no se da que las condiciones para su posible demostración se cumplan o no. El concepto de demostración debe tomarse en su sentido constructivo, lo cual, en el caso de enunciados atómicos, implica la existencia de procedimientos efectivos de demostración (demostraciones finitarias serían ejemplos indudables). En el caso de enunciados con constantes lógicas, una demostración constructiva de los mismos será la que responda a las condiciones de demostrabilidad que aparecen, por ejemplo, en Heyting (1956, cap. VII) o en Troelstra (1969, § 2). Precisamente estas condiciones, como también las reglas de introducción del sistema de Deducción Natural de Gentzen, son las que resultan fundamentadas por esta concepción del significado. Con todo, debe observarse que la caracterización del significado de los enunciados matemáticos en términos de las condiciones para su demostración exige ulteriores precisiones.

En primer lugar, existen de hecho diferentes maneras de demostrar un enunciado. Por ejemplo, el enunciado " $7 + 5 = 5 + 7$ " puede demostrarse de acuerdo con las reglas usuales de cómputo, calculando las sumas en cuestión,

pero también puede demostrarse a partir del enunciado $\forall x \forall y (x + y = y + x)$. Así, para poder caracterizar de manera unívoca el significado de las constantes lógicas, es necesario especificar condiciones unívocas para demostrar cualquier enunciado. Esto lleva a introducir el concepto de demostración *canónica* (tal como aparece en Prawitz 1977, pp. 21 y ss.), dando lugar a una caracterización precisa y unívoca de las constantes lógicas, y es así que el conocimiento del significado de un enunciado matemático consiste en dar o reconocer una (posible) demostración canónica del mismo. Toda otra demostración, si es correcta, deberá poder reducirse a una demostración canónica. De este modo, si las reglas de introducción de Deducción Natural caracterizan el significado de las constantes lógicas, las demostraciones que empleen esas reglas serán las canónicas, mientras que las demostraciones que empleen otro tipo de reglas, como las de eliminación, deberán poder reducirse a otra que emplee únicamente reglas de introducción. En esto consisten los procedimientos de normalización.

En segundo lugar, las reglas de demostración, que reflejan el uso de las constantes lógicas (como las de Deducción Natural), no deben verse ahora como las reglas –sintácticas– de un sistema formal, ya que, de acuerdo con los teoremas de incompletud de Gödel, no pueden obtenerse en un sistema formal todas las verdades matemáticas. Prawitz atribuye el origen de la popularidad del realismo semántico al descubrimiento de la incompletud de los sistemas formales para la matemática, pues lleva a pensar que las reglas de un sistema formal nunca pueden dar una caracterización del significado (véase Prawitz 1977, p. 15). Los enunciados de Gödel pueden tener condiciones de verdad incognoscibles, pero no por eso dejan de tener significado (en el sentido aquí expuesto). Así pues, no se debe confundir la formulación del significado por medio de reglas de demostración con alguna forma de sintactismo (es decir, la consideración de la lógica y la matemática como sistemas sintácticos sin interpretar), ya que estas reglas se aplican a enunciados que ya tienen un contenido dado, siendo así reglas semánticas y previas a la construcción de un sistema formal.

Por lo demás, el hecho de caracterizar la verdad matemática sobre la base del concepto de demostración no excluye la aceptación de un realismo ontológico. En efecto, de un lado, la creencia en la existencia de una realidad matemática externa no implica necesariamente la afirmación del principio de bivalencia del realismo semántico. De otro lado, el problema en cuestión no es el de la existencia de los referentes de los términos matemáticos, sino el de cómo determinar el significado de los enunciados matemáticos (o, como se ha señalado otras veces, de cómo los enunciados matemáticos pueden ser objetivos).

V

La sustitución de la verdad por la demostración como concepto central de una teoría del significado lleva a que se hable de las condiciones bajo las cuales la verdad de un enunciado puede ser establecida de manera concluyente. Esta idea puede generalizarse para enunciados cualesquiera —por ejemplo, enunciados sobre la realidad física— mediante el concepto de verificación. Como dice Dummett, “conocer el significado de un enunciado es, en tal concepción, ser capaz de reconocer todo lo que verifique el enunciado, *i. e.*, lo que lo establezca de modo concluyente como verdadero” (Dummett 1973, p. 227).

Cabe notar la diferencia esencial respecto de la teoría verificacionista del significado sostenida por el positivismo lógico de los tiempos del Círculo de Viena, caracterizado por el *dictum* “el significado de un enunciado es el método para verificarlo”. En primer lugar, el concepto de verificación al que se refiere Dummett es más amplio, incluyendo demostraciones e inferencias no deductivas, además de la observación empírica (véase Dummett, *loc. cit.*), y obviamente no se limita a enunciados sobre la realidad empírica, sino que se aplica también a enunciados lógicos y matemáticos, los cuales eran para el positivismo lógico verdades analíticas que no necesitan verificación.

Pero, en segundo lugar, el verificacionismo positivista sostenía el principio de bivalencia y, por esta razón, consideraba significativos sólo a aquellos enunciados cuyas condiciones de verdad eran decidibles, es decir, se cumplían o no, restringiendo de manera inaceptable el conjunto de enunciados con significado. (Más aun, sólo eran auténticos enunciados aquellas oraciones que eran verdaderas o falsas.) Claramente, el problema se originaba al sostener al mismo tiempo un verificacionismo semántico y el principio de bivalencia.¹ Por el contrario, un enfoque que no adhiriera al principio de bivalencia deja abierta la posibilidad de enunciados indecidibles pero significativos. Esto es posible al entender el conocimiento de las condiciones de verdad de un enunciado como conocimiento de las condiciones para su demostración. Este concepto de demostración, aplicable a enunciados lógicos y matemáticos, puede generalizarse para enunciados cualesquiera mediante el concepto de aseveración correcta. Se supone que una persona cualquiera tiene conocimiento de

¹ El problema se advierte incluso en el artículo de C. Hempel “Problems and Changes in the Empiricist Criterion of Meaning”, en *Revue Internationale de Philosophie*, 11 (1950). Un ejemplo de tal enfoque y sus consecuencias respecto de los fundamentos de la matemática puede verse en el cap. I de la *Sintaxis lógica del lenguaje* de R. Carnap, donde se presenta un lenguaje formal decidible, pero que no es suficiente para expresar la matemática clásica en su totalidad (véase R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Viena, Springer, 1934, pp. 34 y ss.).

las condiciones para aseverar de manera correcta un enunciado, siempre que sea posible reconocer que las condiciones se cumplen, toda vez que se cumplen. En consecuencia, enunciados con significado son aquellos que pueden reconocerse como verdaderos, en el caso de que sean verdaderos.

Enunciados indecidibles, como la ya mencionada conjetura de Goldbach, tendrían así significado, ya que si fuesen verdaderos, sus condiciones de verdad podrían conocerse. Por lo tanto, de un enunciado cuyas condiciones de verdad no puedan ser reconocidas o especificadas, incluso en el caso de que fuera verdadero, no podría afirmarse que tiene significado. De este modo, el hecho de que un enunciado tenga significado depende de mostrar o reconocer las condiciones para aseverarlo de manera correcta (las que en el caso específico de enunciados matemáticos son las condiciones de su demostración).

Con todo, es bien sabido que el concepto de verificación se enfrenta con importantes objeciones, que valen tanto cuando se da con él un criterio de significatividad como cuando se lo adopta como concepto central para una teoría del significado. Piénsese en los muchos casos de enunciados para los cuales no parece poder determinarse en qué consiste su verificación (las leyes fácticas, por ejemplo). Aun menos claro es en qué consistiría una verificación canónica de enunciados no matemáticos. A menudo se habla de criterios para determinar algo como evidencia suficiente para verificar un enunciado, pero no hay acuerdo acerca de cuáles sean estos criterios.

El problema, en síntesis, reside en la inclusión dentro de una teoría del significado de los medios para considerar verdadero un enunciado fáctico. Pero ésta sería una cuestión aparte, relativa, en realidad, a los criterios de verificabilidad. De este modo, sería mejor abandonar el concepto de verificación y hablar, en cambio, de las condiciones para aseverar de manera correcta un enunciado como el concepto central para una teoría del significado. En el caso de enunciados matemáticos, éstas están constituidas por demostraciones.²

Sin embargo, nuevamente surgen complicaciones. Basta prestar atención a la evolución histórica del conocimiento científico, en la cual enunciados que en un momento dado parecen cumplir con las condiciones para ser aseverados de manera correcta resultan ser de incorrecta aseveración en un momento posterior. Se podría alegar que esos enunciados no habrían cumplido nunca tales condiciones, puesto que la evidencia disponible no era adecuada para aseverarlos. En todo caso, en este punto surge un aspecto fundamental de los enunciados no matemáticos, y es la ausencia de condiciones *concluyentes* para su

² Dummett, teniendo en cuenta objeciones de este tipo, propuso como concepto central el de falsificación (véase Dummett 1976), que también es problemático.

aseveración, que hacen que un enunciado no pueda ser aseverado de manera definitiva.

Prawitz ha comparado el tipo de evidencia que se ofrece respecto de enunciados fácticos con algunas demostraciones clásicas en matemática que son rotuladas generalmente como no constructivas. Tómese el caso de la derivación de $\forall xPx$ a partir de $\neg P\neg x$, donde Px es una propiedad decidible en el dominio de los números naturales. El método para hallar un n tal que se diera Pn consistiría en ir buscándolo a través de los números naturales, y, dado que la propiedad es decidible, tarde o temprano se verificará que Pn . Pero esto constituiría una evidencia "débil" para aseverar $\forall xPx$, ya que no es una auténtica demostración canónica del mismo a partir del otro enunciado (véase Prawitz 1987, p. 146).

En suma, hasta aquí se tiene que el concepto de verdad matemática se obtiene a partir del concepto de demostración: un enunciado matemático es verdadero si y sólo si puede proporcionarse una demostración (canónica) del mismo. Este concepto de verdad matemática es subsidiario de una teoría del significado que se elabora tomando las condiciones para hacer una aseveración correcta como concepto central y satisface, sin duda, el segundo requisito impuesto por Benacerraf a toda teoría de la verdad matemática, ya que hace depender a esta última del modo en que es conocida.

En cuanto al primer requisito, la situación no es tan clara y puede ponerse en duda que realmente lo cumpla. En efecto, el concepto de las condiciones para hacer una aseveración correcta, del cual el concepto de las condiciones de demostración es un caso particular, no logra caracterizar adecuadamente el concepto de verdad respecto de ámbitos distintos de la matemática, en los que la evidencia disponible no es concluyente. Esto brinda apoyo a la vieja tesis de la existencia de una diferencia esencial entre las verdades lógicas y matemáticas, de un lado, y las verdades fácticas, de otro lado. Pero también lleva a pensar que la idea misma de verdad debería ser reemplazada por alguna otra, más amplia, tal como podría ser la de verosimilitud o aproximación a la verdad, en tanto concepto semántico fundamental y vinculado con el contenido de un enunciado. No obstante, sería necesario revisar este concepto previamente y ver en qué medida es aplicable a la lógica y la matemática.

BIBLIOGRAFIA

- Benacerraf, Paul (1983), "Mathematical Truth". En P. Benacerraf & H. Putnam (comps.), *Philosophy of Mathematics*, 2da. ed., Cambridge, Cambridge University Press, pp. 403-420.

- Dummett, Michael (1959), "Truth". En Dummett 1978, pp.1-24.
- (1963), "Realism". En Dummett 1978, pp. 145-165.
- (1973), "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic". En Dummett 1978, pp. 215-247.
- (1976), "What is a Theory of Meaning? Part II". En G. Evans & J. McDowell (comps.), *Truth and Meaning*, Oxford, Clarendon Press, pp. 67-137.
- (1978), *Truth and Other Enigmas*, Londres, Duckworth.
- (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press.
- Gentzen, Gerhard (1935), "Untersuchungen über das logische Schließen", *Mathematische Zeitschrift*, 39, pp. 176-210 y 405-431.
- Heyting, Arendt (1956), *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, North-Holland.
- Legris, Javier (1994) "Nota sobre las críticas al realismo semántico: el caso de los enunciados indecidibles", *Revista de Filosofía* (Buenos Aires), 9, pp. 79-85.
- Prawitz, Dag (1977), "Meaning and Proofs: on the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic", *Theoria* (Lund), 43, pp. 2-40.
- (1987), "Dummett on a Theory of Meaning and Its Impact on Logic". En B. M. Taylor (comp.), *Michael Dummett*, Dordrecht, Martinus Nijhoff.
- Troelstra, Anne (1969), *Principles of Intuitionism*, Berlín-Heidelberg-N.York, Springer.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES - CONICET

ABSTRACT

In this paper I try to show how the truth conditions for mathematical statements can be understood as conditions for them to be proved. It is argued that the very notion of proof plays a central role in a plausible theory of meaning. The whole question is analyzed in terms of knowledge of meaning, and arguments from semantic anti-realism are taken into account. Hence, a theory of mathematical truth emerges which is in conformity with a general theory of truth and with mathematical epistemology, since the conditions for the truth of a mathematical statement must be in this account knowable. That is, if a mathematical sentence is true, it must be possible to recognize that it is true. However, I also show some difficulties related to the extension of this approach beyond the realms of logic and mathematics.