DOI 10.36446/af.e1006

REGLAS IMPLÍCITAS Y LA DIFERENCIA ENTRE DEDUCCIÓN NATURAL Y CÁLCULOS DE SECUENTES:
ACERCA DE “GENTZEN Y LA NATURALIDAD DE LA DEDUCCIÓN” DE ALBERTO MORETTI

Implicit Rules and the Difference between Natural Deduction and Sequent Calculi:
On “Gentzen y la naturalidad de la deducción” by Alberto Moretti

Paula Teijeiro [a, b]
https://orcid.org/0000-0003-3906-8339
paulateijeiro@gmail.com

[a] Instituto de Investigaciones Filosóficas - Sociedad Argentina de Análisis Filosófico - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Buenos Aires, Argentina.
[b] Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

Resumen

En la presente nota voy a analizar las ideas que Alberto Moretti (1984) presenta en su artículo “Gentzen y la naturalidad de la deducción” respecto de la importancia de los cálculos de secuentes. Mi objetivo es argumentar que la diferencia entre estos cálculos y los de deducción natural radica fundamentalmente en el modo en que las reglas estructurales pueden estar implícitas en ellos, y que, a diferencia de lo que plantea Moretti, los cálculos de deducción natural son particularmente apropiados para caracterizar la noción de consecuencia.

Palabras clave: Reglas estructurales; Derivabilidad; Admisibilidad; Reglas implícitas.

Abstract

The goal of this note is to analyze the ideas presented by Alberto Moretti (1984) in his article “Gentzen y la naturalidad de la deducción” regarding the importance of sequent calculi. My goal is to argue that the difference between these systems and those of natural deduction lies fundamentally in the way in which structural rules can be implicit in them, and that, unlike what Moretti proposes, natural deduction calculi are particularly appropriate for characterizing the notion of consequence.

Key words: Structural Rules; Derivability; Admisibility; Implicit Rules.

1. Un cálculo natural

En "Gentzen y la naturalidad de la deducción" (1984), Alberto Moretti reconstruye la idea de un cálculo de deducción natural (DN) (Gentzen, 1934) como aquel que da cuenta de tres intuiciones a la vez: (1) ofrece los razonamientos matemáticos correctos, (2) reconstruidos de la manera más fiel a como los matemáticos efectivamente razonan y (3) define la semántica de los conectivos lógicos. Por extensión, la lógica considerada "natural" será la determinada por DN.

El resultado de este punto de vista es que (1) la lógica intuicionista resulta más natural que la clásica, puesto que, por un lado, hay un gran consenso en que las reglas del condicional naturales de acuerdo a (2) y (3) son I$\rightarrow$ y MP:

$$(\mathrm{I}\rightarrow)\quad \frac{\begin{array}{|l}\varphi\\ \psi\end{array}}{\varphi\rightarrow\psi} \qquad\qquad (\mathrm{MP})\quad \frac{\begin{array}{l}\varphi\rightarrow\psi\\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

Pero sin embargo, I$\rightarrow$ y MP solas no permiten probar la ley de Peirce:

$$(\mathrm{LP})\qquad ((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi)\rightarrow\varphi$$

No obstante, continúa Moretti, existe un problema previo a la hora de definir un condicional (incluso uno intuicionista) en DN mediante I$\rightarrow$, que toma la forma de una especie de antinomia. Por un lado, una definición exitosa debería permitir derivar los dos principios básicos de Debilitamiento y Distribución, de los cuales los otros se deducen:

$$(\mathrm{Deb})\ \psi\rightarrow(\varphi\rightarrow\psi)$$

$$(\mathrm{Distr})\ (\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi))\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))$$

Por el otro, suponiendo que el significado de los conectivos pueda determinarse de manera no-holista, la definición del condicional debería evaluarse en un sistema sin otro vocabulario. Pero de ser así, es imposible aplicar I$\rightarrow$ para derivar los principios que caracterizan al condicional porque, en particular, no se puede derivar (Deb). La regla dice que si hay una derivación de ψ a partir de φ, entonces hay una derivación de $\varphi\rightarrow\psi$, pero al no haber ninguna regla que permita derivar *q a partir de p*, la prueba no puede proceder:

1.	q	sup
2.	p	sup
3.	q	
4.	$p \rightarrow q$	I→
5.	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	I→

La solución está, según Moretti, en la caracterización de un concepto de derivación abstracto, que no presuponga de ningún conectivo en particular, y que se encontraría en los cálculos de secuentes (CS). Estos sistemas se caracterizan en general por manipular afirmaciones de validez en lugar de afirmaciones simpliciter (i.e., fórmulas), y por generalizar las relaciones de consecuencia a casos con múltiples conclusiones. Usualmente, el concepto abstracto de derivación está en ellos definido por reglas estructurales como Reflexividad, Monotonía y Corte, sobre las cuales se montan las reglas operacionales, que definen a las conectivas:

(Ref) $\varphi \vdash \varphi$

(MonI) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}$$ (MonD) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$$

(Cut) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Sigma, \varphi \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}$$

(→I) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta}$$ (→D) $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

EL CÁLCULO CS1

La derivación de (Deb) en un sistema como este es un árbol de la siguiente forma:

$\psi \vdash \psi$	Id
$\varphi, \psi \vdash \psi$	Mon I
$\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	R→
$\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	R→

A su vez, el CS determina la lógica clásica y no la intuicionista, que, por el contrario, surge de imponer restricciones a la estructura de las derivaciones (prohibir que haya más de una conclusión). De esto, Moretti concluye una especie de pluralismo, fundado en que el concepto preteórico de naturalidad puede reconstruirse de maneras distintas, y que ellas determinan distintas lógicas como las más deseables.[1]

No es mi intención aquí discutir la tesis de naturalidad, sino más bien detenerme en cierta idea sobre la que parece descansar la propuesta de Moretti, que es la existencia de una distinción sustantiva entre DN y CS. Es decir, que hay algo que uno puede hacer si se vale de CS (i.e. caracterizar de modo adecuado una noción abstracta de consecuencia) que no es posible utilizando DN.[2] Esta potencia específica del CS, a su vez, provendría del hecho de que explicita las reglas estructurales, lo cual a su vez está facilitado por el hecho de que manipula relaciones entre fórmulas en lugar de fórmulas *simpliciter*.

Sara Negri (2002) parecería atentar en contra de esta tesis cuando defiende que toda pretendida diferencia que caracterice aquello que cuenta como un sistema de DN como algo distinto de un CS tiene contraejemplos. En particular, que hay cálculos para DN con reglas estructurales y supuestos abiertos explícitos. En ese caso, la tesis de Moretti no se aplicaría a los CS como algo sustancialmente distinto de los sistemas de DN, sino que sería más bien una característica de algunas presentaciones en particular. En este punto, parecería que la disputa se convierte en una distinción meramente verbal respecto de qué cosa llamamos DN.

Asumamos entonces —por mor del argumento y *pace* Negri— que por definición los cálculos de DN tienen las reglas estructurales implícitas. ¿Representa esto una desventaja a la hora de caracterizar la relación de consecuencia subyacente? Voy a proponer que, en algún sentido, resulta más bien todo lo contrario.

2. Tipos de reglas

Para empezar, tal como la entendemos aquí, una lógica es una relación de consecuencia entre fórmulas y conjuntos de fórmulas, representada por el signo $\vdash$, que puede caracterizarse, por ejemplo, gracias al concepto de prueba en un sistema, al que llamaremos DN1:

Definición (*Consecuencia*)
$\Gamma \vdash \varphi$ sii existe una DN1-prueba de que $\Delta \vdash \varphi$, para algún $\Delta \subseteq \Gamma$.

[1] Esto es, una especie de pluralismo de precisificaciones *alla* Beall y Restall (2006)

[2] Conversamente, DN permitiría caracterizar una representación de la deducción en algún sentido isomórfica a la práctica inferencial real, que se desdibuja cuando usamos CS.

¿Qué quiere decir exactamente que exista esa DN-prueba? La mera presentación de reglas de introducción y eliminación ofrecida más arriba no es suficiente para determinar una relación de consecuencia, sino que para ello es necesario definir qué tipos de secuencias de fórmulas cuentan como pruebas. Raramente encontramos explicitada en los libros de texto una definición formal de ello. Ofrecerla para sistemas lineales es engorroso, puesto que estos son mucho más plásticos respecto de qué cosas cuentan como derivaciones: las reglas no tienen que aplicarse justo después de sus premisas, pueden aparecer supuestos en cualquier parte de la derivación, etc. Es por ello que presentamos aquí una versión para un sistema de árboles:[3]

Definición (*DN1-prueba*)

1. φ es una DN1-prueba de que $\varphi\vdash\varphi$
2. Si $P_1\varphi\rightarrow\psi$ es una DN1-prueba de que $\Gamma\vdash\varphi\rightarrow\psi$ y $P_2\varphi$ es una DN1-prueba de que $\Delta\vdash\varphi$, entonces

$$\dfrac{\begin{matrix} P_1 & P_2 \\ \varphi\rightarrow\psi & \varphi \end{matrix}}{\psi} \qquad \text{es una DN1-prueba de que } \Gamma\cup\Delta\vdash\psi$$

3. Si $P_1\psi$ es una DN1-prueba de que $\Gamma\vdash\psi$, entonces $P_1\varphi\rightarrow\psi$ es una DN1-prueba de que $\Gamma'\vdash\varphi\rightarrow\psi$ donde Γ' es igual a Γ pero posiblemente sin φ.

Esta definición es la caracterización, en el sistema de DN1, del "concepto abstracto de derivación" al que se refería Moretti en relación al CS.

Dicho esto, podemos detenernos en el hecho de que los cálculos no *tienen* reglas de una única manera. Las reglas explícitas son inconfundibles: se trata de aquellas reglas básicas que definen el cálculo. Sin embargo, dentro de las reglas implícitas, las cosas no son tan claras.

Para empezar, digamos que en principio una regla es un conjunto de pares $\langle\Gamma, \varphi\rangle$ (invariante bajo sustitución) donde Γ es un conjunto finito de fórmulas y φ una fórmula. Las reglas en general suelen dividirse en inadmisibles, admisibles y derivables. Si bien podemos aplicar estas categorías a las reglas explícitas, resultan poco interesantes, dado que ellas solo pueden ser derivables (y por ende admisibles), en tanto la

[3] Bajo esta definición, dos argumentos distintos pueden tener la misma prueba, como es el caso de $\langle p, p\rightarrow p\rangle$ y $\langle\varnothing, p\rightarrow p\rangle$ (gracias a Miguel Álvarez Lisboa por hacérmelo notar). Si bien la definición puede complejizarse para evitar esto, considero que no es necesario, puesto que el fenómeno es de todos modos inevitable: cuando los argumentos tengan infinitas premisas, las pruebas de su validez coincidirán forzosamente con las pruebas de validez de otros razonamientos finitos.

definición de Derivabilidad, como se verá a continuación, las presupone. El interés de la distinción radica en permitirnos diferenciar, dentro de las reglas que no forman parte explícita del cálculo, aquellas que se encuentran de algún modo habilitadas por él de las que no.

Existen muchas formas de caracterizar estas propiedades, pero consideremos unas de las más habituales:[4]

Definición (*Admisibilidad$_1$*)
$\langle \Gamma, \varphi \rangle$ es admisible$_1$ en S si no puede probarse en S que $\vdash \gamma$ para alguna $\gamma \in \Gamma$, o si puede probarse que $\vdash \varphi$, para toda instancia de $\langle \Gamma, \varphi \rangle$.

Definición (*Derivabilidad$_1$*)
$\langle \Gamma, \varphi \rangle$ es derivable$_1$ en S si puede probarse que $\Gamma \vdash \varphi$, para toda instancia de $\langle \Gamma, \varphi \rangle$.

Estas definiciones alcanzan para las reglas tales como las caracterizamos hasta ahora, como transformaciones de conjuntos de fórmulas en fórmulas. Sin embargo, muchas reglas —y en particular, las reglas estructurales, que son las que principalmente nos preocupan ahora— no pertenecen a este tipo, son reglas de nivel superior. Diremos entonces que una metarregla es un conjunto de pares (invariante bajo sustitución) $\langle \Pi, \rho \rangle$, donde Π es un conjunto de instancias de reglas y ρ es una instancia (del mismo tipo) de una regla. Para ellas ofrecemos las siguientes definiciones de Derivabilidad y Admisibilidad extendidas:[5]

Definición (*Admisibilidad$_2$*)
$\langle \Pi, \rho \rangle$ es admisible$_2$ en S si alguna $\pi \in \Pi$ no es derivable$_1$ en S, o ρ sí lo es, para toda instancia de $\langle \Pi, \rho \rangle$.

Definición (*Derivabilidad$_2$*)
$\langle \Pi, \rho \rangle$ es derivable$_2$ en S si ρ es derivable$_1$ en el sistema S+ que resulta de agregar a S todas las $\pi \in \Pi$ como reglas explícitas, para toda instancia de $\langle \Pi, \rho \rangle$.

[4] Admisibilidad es más naturalmente una relación entre reglas y lógicas que entre reglas y sistemas, y lo inverso es cierto de Derivabilidad, pero para poder compararlas, y dado que Admisibilidad puede definirse para sistemas pero Derivabilidad no puede definirse para lógicas, presentamos las cosas de esta manera.

[5] En adelante omitiremos el subíndice, permitiendo que el lector desambigüe la lectura apropiada en cada caso según corresponda.

2.1 Reglas estructurales implícitas en un cálculo de deducción natural

Dado que asumimos que los cálculos de DN tienen entonces las reglas estructurales implícitas ¿Podemos decir que se trata de reglas meramente admisibles, derivables, o ninguna de estas cosas?

Reflexividad es derivable en DN1, puesto que es el paso base de la definición de DN1-prueba.[6]

Monotonía es derivable en DN1, puesto que si agregamos como regla explícita una instancia de $\langle\Gamma, \varphi\rangle$ (lo cual implica agregar la cláusula correspondiente a la definición de prueba), se sigue que existe una DN1-prueba de que $\Delta\vdash\varphi$, para algún $\Delta\subseteq\Gamma$ (en particular, $\Delta=\Gamma$). Y por ende, por la definición de $\vdash$, se sigue que $\Gamma, \psi\vdash\varphi$, para cualquier ψ.

Corte (en su versión para conclusiones simples) es derivable en DN1 porque si agregamos como reglas explícitas instancias de $\langle\Gamma, \varphi\rangle$ y $\langle\{\varphi\}, \psi\rangle$, naturalmente tendremos DN1-pruebas $P_1\varphi$ y $P_2\psi$ de que $\Gamma\vdash\varphi$ y $\varphi\vdash\psi$, respectivamente. Por ende, tomamos P_1, y extendemos la prueba con $P_2\psi$, (ubicando la hoja etiquetada con φ en lugar del nodo que terminaba en φ) para obtener una DN1-prueba de que $\Gamma\vdash\varphi$.

¿Hay sistemas de DN con reglas estructurales meramente admisibles? La respuesta es que sí, aunque los ejemplos resultan algo más forzados. Por caso, tomemos la siguiente definición para un lenguaje $\mathcal{L}=\{\{p_i: i\in\omega\}, \neg, \rightarrow\}$, que tiene una cláusula base para fórmulas atómicas y una para el condicional:

Definición (*DN2-prueba*)

1. p es una DN2-prueba de que $p\vdash p$
2. $\phi\rightarrow\psi$ es una DN2-prueba de que $\phi\rightarrow\psi\vdash\phi\rightarrow\psi$.
3. Si $P_1\phi\rightarrow\psi$ es una DN2-prueba de que $\Gamma\vdash\phi\rightarrow\psi$ y $P_2\phi$ es una DN2-prueba de que $\Delta\vdash\phi$, entonces

$$\frac{\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ \phi\rightarrow\psi & \phi \end{array}}{\psi} \qquad \text{es una DN2-prueba de que } \Gamma\cup\Delta\vdash\psi$$

4 Si $P_1\psi$ es una DN2-prueba de que $\Gamma\vdash\psi$, entonces $P_1\phi\rightarrow\psi$ es una DN2-prueba de que $\Gamma'\vdash\phi\rightarrow\psi$ donde Γ' es igual a Γ pero posiblemente sin ϕ.

El efecto de esto es que si bien podemos derivar muchas instancias de Reflexividad, no podremos derivar todas. En particular, siempre que haya una prueba de que $\vdash\varphi$, obviamente habrá una prueba de que $\vdash\varphi$, pero sin embargo, no habrá una prueba de que $\neg p\vdash\neg p$.

[6] Al ser derivable$_1$, es trivialmente derivable$_2$.

Tenemos entonces que, *en el contexto de DN, las reglas estructurales implícitas suelen ser derivables*, puesto que se encuentran “grabadas”, ya sea en la definición de prueba (como es el caso de Reflexividad, en la cláusula base, o Corte, en el concepto mismo de árbol), o en la definición de consecuencia (como es el caso de Monotonía). Sin embargo, con las modificaciones apropiadas, podemos lograr que sean meramente admisibles.

2.2 Reglas estructurales implícitas en un cálculo de secuentes

En contraposición, podemos observar que en el caso de los CS, la situación es la dual. *En términos generales, cuando en un CS una regla estructural se encuentra implícita, será meramente admisible.*[7] Es sin dudas lo que sucede en los casos más habituales, como por ejemplo, si borramos (Cut) de CS1.

Sin embargo, también es posible tener las reglas como derivadas a partir de otras, incluso de otras reglas operacionales. Para dar un ejemplo sencillo pero de juguete, en la tradición paraconsistente brasileña (ver por ejemplo da Costa, 1974) es habitual trabajar con un operador “bola”, que se usa para marcar las oraciones consistentes, es decir, aquellas para las cuales valen todas las inferencias clásicas. En particular, uno podría, en un cálculo sin Corte (llámese CS2), querer especificar que esas oraciones pueden cortarse:

$$\frac{\Gamma\Rightarrow\varphi \qquad \varphi\Rightarrow\Delta \qquad \Sigma\Rightarrow \mathrm{o}\varphi}{\Gamma,\Sigma\Rightarrow\Delta}$$

Si además tenemos en CS2 un par de reglas que determinen que todas las fórmulas son consistentes:

$$\frac{\Gamma\Rightarrow\varphi}{\Gamma\Rightarrow \mathrm{o}\varphi} \qquad\qquad \frac{\varphi\Rightarrow\Delta}{\mathrm{o}\varphi\Rightarrow\Delta}$$

Corte se vuelve CS2-derivable:

$$\frac{\dfrac{\Gamma\Rightarrow\varphi}{\Gamma\Rightarrow \mathrm{o}\varphi} \qquad \Gamma\Rightarrow\varphi \qquad \varphi\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

7 “Agregar como regla explícita”, en el contexto del CS, debe entenderse como agregar el secuente como regla sin premisas, es decir, como axioma.

Por supuesto, es extraño pensar que alguien querría tener un cálculo en el que figura explícitamente una versión más débil de Corte, si luego ha de recuperarla mediante otras reglas adicionales.

Respecto de Monotonía, vale la pena notar una particularidad. Si bien existen muchos cálculos que incorporan Monotonía en otras reglas, o incluso cálculos no monotónicos, en un CS necesitamos, al igual que con DN, una definición de consecuencia que vincule al sistema con la lógica. Lo más usual suele ser tomar lo que se denomina la noción "interna" de consecuencia, y un modo posible de formularla es el siguiente:

Definición (*Consecuencia*)
$\Gamma \vdash \varphi$ sii existe una CS-prueba de que $\vdash \Delta \Rightarrow \varphi$, para algún $\Delta \subseteq \Gamma$.

En este caso, Monotonía sería igualmente derivable, aunque las pruebas no sean monótonas por ausencia de la regla explícita. Si quisiéramos que Monotonía efectivamente falle o sea meramente admisible, habría que sacarla de la definición de consecuencia.

Lo que sucede en verdad es que hay en danza dos sentidos de regla paralelos: por un lado, el sentido abstracto, mencionado más arriba, en el cual es un tipo de inferencia esquemática, y por el otro, un sentido más sintáctico que tiene que ver con transformaciones aceptables en el contexto de una prueba.[8] En general, estos sentidos están estrechamente conectados, en tanto las reglas como instrumentos de prueba pueden entenderse como instanciaciones de sus contrapartes abstractas. Por ejemplo, a MP entendida como un conjunto de pares del tipo $\langle\{\varphi\rightarrow\psi, \varphi\}, \psi\rangle$ le corresponde el permiso de escribir "ψ" luego de "$\varphi\rightarrow\psi, \varphi$" en una secuencia de prueba.

Sin embargo, hay ciertas reglas cuya trasposición concreta es menos sencilla. En particular el espíritu de Monotonía consiste en el hecho de que considerar premisas "extra" no daña la relación de consecuencia, aunque sean irrelevantes para ella. En sentido sintáctico, esto correspondería a la posibilidad de agregar cualquier cantidad de fórmulas, en cualquier momento de la derivación, lo cual no solo es engorroso de formular, sino que además genera ruido innecesario, que interfiere con herramientas útiles en teoría de la prueba (como mecanismos de búsqueda de pruebas, normalizaciones, etcétera).[9]

[8] Sin dudas algo semejante puede decirse del concepto de prueba, pero concedamos hasta aquí.

[9] Por supuesto, que sea engorroso no quiere decir que sea imposible, y muchos cálculos (como CS1, o los cálculos de DN tipo Ficht) son en sí mismos monótonos. Sin embargo, hay un aspecto de la regla de Monotonía abstracta que efectivamente no

3. Conclusiones

En síntesis, podemos ver que si bien no es una condición formalmente necesaria, el modo que tienen de ser implícitas las reglas estructurales *es prima facie* diferente en los CS y en los de DN: mientras que en los primeros tienden a ser admisibles, en los segundos tienden a ser derivables. El motivo es que, en estos últimos, "implícitas" es en verdad algo así como "explícitas en la metateoría". Incluso más, si quisiéramos ofrecer un cálculo donde ellas fueran meramente admisibles, lo cual no es sencillo, esa metateoría debería estar efectivamente —y a diferencia de lo que suele suceder— explicitada.

Por el contrario, cuando una regla está ausente en un CS, ello puede querer decir que es derivable, que es meramente admisible, o que es directamente inadmisible. Lo segundo es sin duda lo más habitual, puesto que el propósito de los CS suele ser estudiar de forma concisa propiedades de cierta lógica caracterizable por ese cálculo. Pero en casos menos ortodoxos, como el ejemplo de juguete que mencionábamos, o en el caso de lógicas subestructurales, uno puede encontrarse con fenómenos de los otros dos tipos.

Esto significa que el ser implícito en DN suele ser más fuerte que en CS. No solo eso, sino que las reglas derivables no pueden dejar de serlo, sin importar cómo se modifique el sistema. Las que son meramente admisibles, por el contrario, podrían volverse inadmisibles si se agrega al lenguaje vocabulario que valide nuevas inferencias. En este sentido, podría decirse que un sistema de DN caracteriza de manera más inequívoca incluso que un CS su noción de consecuencia. Por supuesto, la invariancia bajo expansiones del lenguaje no es la única propiedad interesante a la hora de considerar cómo se determina una relación de consecuencia. La presencia de reglas estructurales explícitas, por ejemplo, puede ser también considerado por razones epistémicas un desiderátum que incline la balanza en favor de los CS. En última instancia, no hay motivos para pensar que existe algo así como una rivalidad conceptual entre diferentes tipos de sistemas, sino que cada uno tiene su propio interés técnico.

Para terminar, vale la pena comparar la situación en estas dos clases de cálculos con lo que ocurre en los sistemas axiomáticos más tradicionales. La situación respecto de las reglas estructurales es seme-

puede trasponerse a una versión concreta, que es la instancia en la cual la cantidad de premisas extra que se agregan es infinita. Puesto que los sistemas de prueba son relevantes (al menos predominantemente) para lógicas que son compactas, esto no es un problema.

jante a la de DN. Lo curioso ocurre al nivel de las metarreglas operacionales implícitas, como es el caso de I$\rightarrow$, (usualmente llamado en estos contextos "Metateorema de la deducción"). Esta regla es meramente admisible, dado que si agregamos $\langle p, q\rangle$ como regla explícita, igualmente no podríamos probar que $\vdash p \rightarrow q$ mediante los axiomas tradicionales de $\rightarrow$ y la regla de MP.[10] Sin embargo, y a diferencia de lo que sucedía con el caso de Corte en CS2, no hay reglas o axiomas que podamos agregar que vuelvan a esta metarregla derivable, *pace* trivialidad. Sí pueden agregarse otras metarreglas, pero ello atentaría contra la definición de sistema axiomático.

Estas últimas consideraciones apuntan a que, para sorpresa de nadie, existe un salto expresivo mucho más sustancial entre sistemas axiomáticos y sistemas de deducción natural que entre estos últimos y cálculos de secuentes.

Bibliografía

Beall, J. C., & Restall, G. (2006). *Logical pluralism*. Oxford University Press.

da Costa, N. C. A. (1974). On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *15*(4), 497-510. https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093891487

Gentzen, G. (1934). Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschirift, 39,* 176-210. https://doi.org/10.1007/BF01201353

Moretti, A. (1984). Gentzen y la naturalidad de la deducción. *Análisis Filosófico*, *4*(1), 45-51. https://doi.org/10.36446/af.1984.843

Negri, S. (2002). Varieties of linear calculi. *Journal of Philosophical Logic, 31*, 569-590. https://doi.org/10.1023/A:1021264102972

Recibido el 14 de julio de 2023; revisado el 2 de octubre de 2023; aceptado el 22 de diciembre de 2023.

[10] Sería un error concluir que el motivo por el cual I$\rightarrow$ no es derivable es que se trata de una metarregla, dado que, por ejemplo, las metarreglas cuyas conclusiones son esquemas válidos son derivables.