DOI 10.36446/af.e1273

¿QUÉ PUEDEN APORTAR LOS CASI-CONJUNTOS A LA LÓGICA?

What Can Quasi-Sets Contribute to Logic?

Juan Pablo Jorge [a]
https://orcid.org/0000-0003-4517-8729
jorgejpablo@gmail.com

[a] Instituto de Filosofía "Dr. Alejandro Korn", Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

Resumen

Analizamos los aportes que pueden realizar las teorías de casi-conjuntos para los intereses del lógico. Las diferentes teorías de casi-conjuntos han realizado valiosos aportes a los fundamentos de la matemática y física cuántica; sin embargo, no queda claro cuánto pueden favorecer tales formalismos a la lógica. De ser el caso, ¿podrían tener repercusión tanto a nivel sintáctico como semántico? ¿Qué precauciones deberíamos tener? ¿Qué implicaciones tendría su aplicación a diferentes niveles y metaniveles del lenguaje lógico? Motivados principalmente por investigaciones provenientes de la lógica cuántica, aunque también presentamos motivaciones lingüísticas, proponemos ciertas aplicaciones y analizamos algunas de sus consecuencias.

Key words: Nmatrices; Casi-Conjuntos; Quasets; Lógica cuántica; Teorema de Kochen-Specker.

Abstract

We analyze the contributions that quasi-set theories can make to the interests of logic. Different quasi-set theories have made valuable contributions to the foundations of mathematics and quantum physics; however, it remains unclear to what extent such formalisms can benefit logic. If so, could they have repercussions at both the syntactic and semantic levels? What precautions should we take? What implications would their application have at different levels and metalevels of logical language? Motivated primarily by research in quantum logic, though we also present linguistic motivations, we propose certain applications and analyze some of their consequences.

Key words: Nmatrices; Quasi-sets; Quasets; Quantum Logic; Kochen-Specker Theorem.

La intuición y el método axiomático se apoyan mutuamente.
Newton da Costa (1980, p. 191)

1. Introducción

Este trabajo problematiza el uso de indiscernibles en el marco de la lógica. Su objetivo es explorar hasta qué punto los entes indiscernibles, junto con sus correspondientes formalizaciones, pueden ser de interés para los objetivos del lógico. La teoría de casi-conjuntos, con sus distintas formulaciones, lleva más de 35 años realizando aportes a la metafísica y fundamentos de la mecánica cuántica. Desde sus inicios (Krause, 1990, 1992) hasta la actualidad (Krause & Jorge, 2024), los casi-conjuntos (también llamados qsets, quasi-sets o cuasi-conjuntos) han dado claras muestras de su importancia para la metafísica de los entes cuánticos (ver French & Krause, 2006 y Krause et al., 2025). Actualmente existen dos teorías de casi- conjuntos: la teoría con átomos $\mathfrak{Q}$, que es la original, y la reciente teoría 'pura' $\mathfrak{Q}^{-}$, que no tiene átomos.

Su importancia trasciende los fundamentos de la cuántica, ya que la teoría de casi-conjuntos (cualquiera de ellas) es un formalismo conjuntista con interés per se. Como teoría axiomática de "conjuntos", representa una estructura deformable (no rígida), es decir, una estructura con un automorfismo [1]distinto de la identidad. Este automorfismo no trivial es la indiscernibilidad entre casi-conjuntos. De esta forma, la teoría de casi-conjuntos[2] puede dar cuenta de entes genuinamente indiscernibles sin recurrir a artificios, como pasa en teorías de conjuntos al estilo ZF (también ZFC, NF, NBG, etc.), donde cualquier intento de indiscernibilidad termina en una indiscernibilidad simulada. En estructuras rígidas como ZF (ver Rubin, 1967), estructuras cuyo único automorfismo es la identidad, todo ente puede caracterizarse unívocamente a través de una propiedad extensional (ver Krause, 2023). Esto significa que toda estructura no rígida de ZF (por ejemplo, la estructura de los números complejos, con la conjugación compleja como automorfismo no trivial) puede ser extendida a una estructura que admita solo el automorfismo trivial. En esta estructura extendida, todo ente de su dominio es un ente con identidad (individuo) y cualquier intento de indiscernibilidad se desvanece o colapsa a la identidad.

Dicho esto, el lógico podría preguntarse: ¿qué aportes podrían realizar las axiomatizaciones de estructuras deformables como $\mathfrak{Q}^{-}$ a la ló-

[1] Un automorfismo es un isomorfismo de un objeto matemático en sí mismo. Por ser un isomorfismo, caso especial de homomorfismo, mantiene las estructuras.

[2] Cuando la tratemos en singular, significa que lo que estamos diciendo vale indistintamente para la teoría con átomos y para su análogo sin átomos.

gica? Las respuestas no se hacen esperar. Son conocidas las virtudes que formalismos como la teoría de conjuntos paraconsistente pueden tener para la semántica de sistemas lógicos no clásicos (Weber et al., 2016). La teoría de conjuntos paraconsistente ha cambiado la lógica básica de la teoría de conjuntos y ha seleccionado la lógica paraconsistente que puede tratar con contradicciones sin generar explosión (Carnielli & Coniglio, 2016).[3] La teoría de casi-conjuntos puede ser utilizada con fines similares tanto a nivel semántico (sección 5) como a nivel sintáctico (sección 4). Mostraremos que la teoría $\mathfrak{Q}^-$ puede ser utilizada a nivel metateórico tanto para definir lenguajes lógicos con *indiscernibles*[4] como para fundamentar semánticas Nmatriciales apropiadas para interpretar proyectores sobre espacios de Hilbert, que eviten paradojas como la del teorema de Kochen-Specker (Kochen & Specker, 1990).

En la sección siguiente, daremos una presentación básica de las teorías $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q}^-$, para comprender los razonamientos de las siguientes secciones. Luego, en la sección 3, presentaremos un par de ejemplos, provenientes de los fundamentos de la mecánica cuántica y de la lingüística, que motivan nuestras aplicaciones. Las secciones 4 y 5 presentan los razonamientos para aplicar los casi-conjuntos a nivel sintáctico y semántico de nuestras lógicas. Para cerrar este trabajo, brindaremos algunas conclusiones y perspectivas a futuro.

2. Teorías de casi-conjuntos $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q}^-$

2.1. Algunos ejemplos e intuiciones básicas de casi-conjuntos

Para el lector que no está acostumbrado a los formalismos conjuntistas, presentamos en este apartado algunos ejemplos que pueden ayudar a ganar intuición con los casi-conjuntos. No pretende ser riguroso ni ir a los detalles, sino simplemente ilustrar algunos conceptos.[5]

[3] He tomado el ejemplo de la teoría de conjuntos paraconsistentes, porque también tiene peculiaridades lógicas con respecto a la identidad, no porque conozca un estudio riguroso sobre su rigidez o deformabilidad. Tanto la teoría de quasets QST de Dalla Chiara y Toraldo di Francia (1993) como las de casi-conjuntos pueden ser interpretadas de forma paracompleta, en vez de paraconsistentemente (Jorge et al., 2023, 2025). Esta es otra razón por la cual nos referimos a ella en la comparación

[4] Así como la lógica de primer orden constituye el metalenguaje de la teoría de casi-conjuntos, esta teoría puede pasar a formar parte del metalenguaje de una teoría con otro lenguaje objeto definido. Ejemplos de esto lo constituyen las construcciones mostradas en Holik et al. (2022) y Krause et al. (2025).

[5] Agradezco a uno de los revisores anónimos por la sugerencia de incluir estos ejemplos.

Cuando tratamos con entes de nuestra vida cotidiana, como manzanas, pelotas o planetas, utilizamos su condición de individuo para generar colecciones y trabajar con ellas. Formamos conjuntos de pelotas y predicamos sobre ellos, hablamos de los planetas del sistema solar como si formaran una colección clásica, que puede formalizarse utilizando la noción de conjunto, y entendemos perfectamente el significado de proposiciones como "el conjunto de todas mis medias es un subconjunto del conjunto formado por todas mis prendas". De esta manera, también contamos medias, planetas o pelotas sin mucha dificultad. Siempre tenemos forma de saber si una media ya ha sido contada, porque podemos ordenarlas (utilizando algún criterio, como peso, color, año de incorporación a mi cajón, etc.), y también podemos evitar fácilmente no contarla dos veces. Esto es posible porque los entes clásicos son individuos o entes con identidad. En términos lingüísticos, podríamos decir que son entes que admiten designación rígida o nombres propios.

Como consecuencia de lo anterior, tales colecciones pueden ser capturadas formalmente utilizando una teoría de conjuntos como ZF, que cuenta con la lógica de primer orden con identidad en su metalenguaje. Así, si *a y b representan* constantes (distintas) de individuo asignadas a medias de mi cajón, el conjunto {*a, b*} representa un par no ordenado, que podría estar denotando el último par azul que compré. Por lo tanto, sabemos que el cardinal de ese conjunto es dos y si quisiéramos formar todos los posibles conjuntos formados con esas dos medias, obtendríamos el conjunto potencia del par de medias, que tiene cardinal 4. Esto es lo que utilizamos cotidianamente en nuestras vidas (tal vez, sin ser conscientes). Con la constante ∅ denotamos el conjunto vacío, que puede estar denotando el conjunto de todos mis Roll Royce, el de todos los solteros casados o el de mis medias talle 46.

Cuando nos adentramos en el mundo cuántico, las cosas ya no son tan simples. Los entes del micromundo son entes sin identidad, entes para los cuales no es posible una designación rígida, esto es, ningún electrón del universo admite un nombre propio. Esto llevó a María Dalla Chiara a decir que el mundo cuántico es el reino del anonimato. Las colecciones de electrones no se comportan de manera estándar. Los electrones de un orbital de un átomo de helio tienen propiedades sin análogo en el mundo macroscópico (entrelazamiento, teletransportación, indiscernibilidad, etc.). Si utilizamos ahora las letras *a y b para* denotar los dos electrones del orbital de un átomo de helio en su estado fundamental, el análogo al par no ordenado {*a, b*} anterior (en la teoría con átomos 𝔒) es el casi-conjunto [*a, b*]. Pero como los electrones son todos indiscernibles, el intercambio de cualquier electrón de la atmósfera por uno de los electrones del orbital de helio no puede ser detectado físicamente de ninguna manera. No produce ningún cambio

físico en ninguna magnitud de la naturaleza. Por lo tanto, estos electrones podrían intercambiarse sin que ninguna otra cosa pasara y sin que siquiera podamos darnos cuenta. Es decir, nada nos permite justificar que el casi-conjunto [*a, b*] es "el mismo" que hace dos segundos si comparten la cardinalidad. Si cambiara el cardinal asociado, entonces podríamos saber que tenemos un casi-conjunto discernible del anterior.

Una de las principales diferencias entre el conjunto {*a, b*} y el casi-conjunto [*a, b*] es que el primero tiene dos elementos, mientras que el segundo puede tener cardinal mayor que dos. Es decir, al no tener la identidad, perdemos la forma clásica de contar (como hacíamos con las medias). Las restricciones sobre la cardinalidad de los casi-conjuntos deben ser incorporadas de forma adicional, debido a que los electrones no pueden ser ordenados como las medias. La teoría de casi-conjuntos es compatible con la existencia de pares no ordenados de cardinalidad 20, 30, o más, dependiendo del baño térmico con el cual el sistema pueda intercambiar electrones. Y si los dos electrones del par [*a, b*] fuesen extraídos del casi-conjunto, obtendríamos un casi-conjunto vacío, también denotado por ∅, pero del cual no puede garantizarse su unicidad (podríamos tener casi-conjuntos vacíos indiscernibles).

Resumiendo: el conjunto de planetas del sistema solar (o el de mis medias) tiene cardinal bien definido (8 sin Plutón) y si alguien intercambiara, por ejemplo, Júpiter por un planeta con exactamente las mismas propiedades (incluso si fuera de forma instantánea), siempre tendríamos formas de saber que algo ha pasado. Sin embargo, para garantizar que un casi-conjunto formado por electrones de un orbital atómico tenga cardinal 2, debemos imponer restricciones adicionales, ya que sin la identidad, no podemos contar electrones de la manera estándar. Además, si cualquier electrón de mi casi-conjunto se intercambiara con otro electrón, perteneciente a otro átomo, no tendríamos ninguna forma de darnos cuenta. No tiene ningún sentido físico hablar de ese cambio, ya que los electrones no admiten nombres propios ni pueden identificarse como siendo "el mismo" a lo largo del tiempo. En el micromundo se pierden estas características clásicas.

2.2. Formalización

En esta sección, formalizaremos las ideas anteriormente presentadas. Lo primero que deberíamos comentarle a un lógico para introducirlo en los casi-conjuntos es que $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q}^{-}$ representan sistemas axiomáticos que extienden conservativamente ZFA (ZFC con átomos o *urelementos)* y ZFC (ZF con elección) respectivamente. Esto es, los teoremas de ZFC se conservan en ambos sistemas (French & Krause, 2006; Krause & Jorge, 2024). Dicho esto,

tendríamos que decirle que la principal diferencia con ZF radica en su relación de *indiscernibilidad.* Esta relación, denotada por "≡", es una relación de equivalencia no congruente, es decir, una relación de equivalencia que no conserva todas las estructuras. En particular, si *x e y son* entes indiscernibles ($x \equiv y$) y sabemos que uno de ellos pertenece al casi-conjunto z ($x \in z$), entonces podría pasar que el otro ente no pertenezca a tal casi-conjunto ($x \notin z$). Es justamente esta propiedad la que permite que 𝔔 y 𝔔– sean estructuras deformables, ya que ≡ es el automorfismo no trivial de ambas teorías.[6] Por lo tanto, la indiscernibilidad no colapsa a la identidad, porque no valida reemplazo de equivalentes.

Posiblemente el lógico nos indague acerca del metalenguaje de estas teorías. Para poder dar cuenta de entes genuinamente indiscernibles, debemos contar en ambos formalismos con alguna lógica no reflexiva. Por lo tanto, ambas teorías cuentan con Lógica de primer orden (LPO) sin identidad en su metanivel. La fórmula '$x = y$' no será una fórmula bien formada, ya que no es aplicable a ciertos entes del dominio (los entes sin identidad o no individuos). De existir a nivel objeto una igualdad, esta debe ser definida (no primitiva) y las reglas que la definan delimitarán el alcance de la misma (ver definición 1-(v) de Holik et al., 2022).

2.2.1. Teoría con átomos

Como es sabido, los átomos en una teoría de conjuntos como ZFA son entidades que no son conjuntos, pero pueden ser elementos de conjuntos. En 1908, Zermelo los llamó urelementos (*Urelemente*) (Zermelo, 1967). Los átomos, a pesar de no tener elementos, son distintos del conjunto vacío.[7] La teoría de conjuntos necesita adaptación para soportar la existencia de átomos, recomendamos Suppes (1972) al lector interesado. La teoría 𝔔 (French & Krause, 2006) encierra dos tipos de átomos: M-átomos y m-átomos. Los M-átomos desempeñan el papel de los urelementos de Zermelo y

[6] Agradezco a uno de los revisores anónimos por hacerme notar que este punto merece una pequeña observación. Cuando decimos que la identidad es un automorfismo, en términos estrictos, lo que queremos decir es que la función $I_a(x) := x \in \{a\}$ es un automorfismo trivial, ya que a cada elemento le asigna el mismo elemento. Esto es consecuencia directa de que los singuletes de ZF tienen un solo elemento, el propio a. Como en las teorías de casi-conjunto no puede garantizarse que el singulete fuerte [a] tenga a a como su único elemento, no puede definirse un isomorfismo identidad de esa manera. Sin embargo, contamos con el isomorfismo (en realidad, q-isomorfismo) $h(x) \equiv x$, que no es trivial. Es en este sentido que decimos que la relación de indiscernibilidad es un automorfismo no trivial de estas teorías.

[7] En principio, nada impide que los átomos tengan elementos, pero es usual tomarlos sin ellos.

para ellos vale la teoría usual de la identidad. Los m-átomos son el correlato formal de los entes cuánticos. Para estos entes, no es aplicable la teoría estándar de la identidad ni el principio de *Identidad de los indiscernibles de* Leibniz. Esto es, en la interpretación pretendida, los m-átomos denotan electrones, protones, fotones, etcétera.

Los casi-conjuntos son aquellos entes que no son átomos y entre ellos hay casos especiales para los cuales se cumplen los axiomas usuales de ZFA (estos casos especiales reproducen todo ZFA). Estos casi-conjuntos se llaman *conjuntos. Así, hay casi-conjuntos* que son conjuntos y otros que no lo son. Tanto unos como otros pueden admitir un cardinal, que llamamos *casi-cardinal* (q-cardinal). Estos q-cardinales son introducidos como una noción primitiva, a diferencia de lo que pasa en ZFA. Introducidos a través de un símbolo primitivo del lenguaje (qc) y limitado su comportamiento a través de algunos axiomas, estos q-cardinales terminan siendo cardinales de ZF, y sabemos que la manera usual de definir cardinales es por medio de ordinales (Jech, 2003).[8] Para más detalles y algunos problemas que genera este concepto, ver Krause y Jorge (2024).

2.2.2. La teoría sin átomos

$\mathfrak{Q}^-$ surge como respuesta a ciertas críticas que se le han hecho a $\mathfrak{Q}$. Uno de estos problemas es el del orden que los q-cardinales, definidos como cardinales de ZF (ordinales límite), imponen a los casi-conjuntos. Si un casi-conjunto está formado solo por una clase de entes indiscernibles, no debe admitir ningún orden, ya que ordenarlos sería una forma de distinguirlos. Otro problema (para algunos autores) es que sin m-átomos, $\mathfrak{Q}$ colapsa a ZFA.[9]

La nueva teoría $\mathfrak{Q}^-$ sirve al menos para dos propósitos. Por un lado, permite que un casi-conjunto esté constituido por elementos indiscernibles y aun así tenga un q-cardinal finito sin que eso implique una ordenación de sus elementos (los q-cardinales infinitos se tratan de manera separada). Por otro lado, sin átomos, puede ser útil para fundamentar una *ontología cuántica de propiedades* (Krause & Jorge, 2024; Krause et al., 2025).

Para formular la teoría $\mathfrak{Q}^-$, se postula la existencia de un universo B (*Bereich,* según Zermelo) cuyos elementos son entidades de dos tipos: los

[8] La definición más común sigue las ideas de von Neumann, donde un cardinal es un ordinal que no es equinumeroso con ningún ordinal menor que él. Esa definición depende del Axioma de la Elección.

[9] Esto no representa nada problemático para nosotros, pero recomendamos Krause y Jorge (2024) para más detalles.

casi-conjuntos y los *casi-cardinales*, o solamente *q-cardinales.* Los conjuntos son casi-conjuntos particulares para los cuales vale la Teoría Clásica de la Identidad (TCI). Usaremos dos tipos de variables "individuales": *x, y, z, ...* para conjuntos y casi-conjuntos, pudiendo utilizarse predicados unarios S y L para distinguirlos respectivamente, y *m, n, p, ...* para los q-cardinales. Los conjuntos son casi-conjuntos, pero no vale la recíproca. Para los casi-conjuntos que no son conjuntos, no se aplica la TCI, sino una relación más débil, llamada *indiscernibilidad.* Esta noción es representada por un predicado diádico '≡', que se aplica también a los conjuntos.[10]

Haremos uso de cuantificadores restringidos: $\forall_S x\ \varphi$ abrevia $\forall x\ (S(x) \rightarrow \varphi)$, mientras que $\exists_S x\ \varphi$ abrevia $\exists x\ (S(x) \wedge \varphi)$, siendo φ una fórmula cualquiera. La expresión "*S (x)"* indica que x es un conjunto (set). Para los q-cardinales, usamos las variables propias de ellos.

Además de los predicados anteriores, entre los símbolos primitivos del lenguaje $\mathcal{L}^-$ de $\mathfrak{Q}^-$, tenemos los predicados diádicos $\in$ (pertenencia), = (identidad) —que se aplicará solo a conjuntos y q-cardinales— y ≡ (indiscernibilidad, o indistinguibilidad). El símbolo relacional binario K es también primitivo, indicando q-cardinalidad. Así *K(x, m)* dice informalmente que el casi-conjunto (o conjunto) x tiene q-cardinal m. Sin embargo, debemos tener cuidado con los q-cardinales por las siguientes razones. Cuando tratamos con conjuntos finitos, sus q-cardinales pueden ser pensados como números naturales definidos por medio de conjuntos de la manera usual (cardinales clásicos). Pero si tratamos con casi-conjuntos, sus q-cardinales no son cardinales en el sentido de ordinales límite.

Vamos a asumir que nuestro lenguaje tiene también los siguientes símbolos específicos: una constante individual $\overline{0}$, un símbolo funcional unario s y dos símbolos funcionales binarios $\otimes$ y $\oplus$. Los términos de nuestro lenguaje son las variables individuales *x, y, z, ...* y *m, n, p, ...,* la constante $\overline{0}$, las expresiones de la forma *s(t)*, que denotaremos por *st* solamente, siendo t un término que se obtiene aplicando una cantidad finita de veces la operación s sobre $\overline{0}$ y, si t_1 y t_2 son términos de ese tipo, entonces $t_1 \oplus t_2$ y $t_1 \otimes t_2$ también lo son.

Los postulados de $\mathfrak{Q}^-$ son divididos en tres grupos: lógicos, relativos a la casi-cardinalidad y los propios de la teoría sin átomos. Para la definición de fórmula atómica y conjunto completo de axiomas, ver Krause y Jorge (2024).

[10] En $\mathfrak{Q}$ (teoría con átomos) se define la identidad extensional, que se aplica a M-átomos y a casi-conjuntos. Tal identidad tiene las propiedades de la identidad usual, pero no es aplicable a m-átomos.

Grupo I – La lógica Sean α, β y γ son fórmulas y ¬, → y ∀ símbolos primitivos:

(1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(2) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$
(3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
(4) $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$, donde x no aparece libre en α.
(5) $\forall_S x\, (x = x)$
(6) $\forall_S x\, \forall_S y\, (x = y \rightarrow (\alpha(x) \rightarrow \alpha(y))$
(7) $\forall m\, (m = m)$
(8) $\forall m\, \forall n\, (m = n \rightarrow (\alpha(m) \rightarrow \alpha(n))$
Las condiciones (6) y (8) tienen las restricciones usuales.

Para los conjuntos y para los q-cardinales, vale la lógica clásica de primer orden con identidad. Sin embargo, para los casi-conjuntos (no pertenecientes al dominio isomorfo a ZF), vale la lógica elemental clásica *sin* identidad. Los demás conectivos proposicionales y el cuantificador existencial son definidos de forma habitual. El carácter "no reflexivo" de esa lógica está en que la noción usual de identidad no se aplica para todos los objetos de los cuales se puede hablar.

Grupo II - q-cardinales Los axiomas para los q-cardinales finitos[11] se asemejan a los axiomas para la aritmética elemental presentados en Mendelson (2009, Cap. 3). Los q-cardinales son isomorfos a los naturales de Peano y constituyen una teoría auxiliar o de apoyo para $\mathfrak{Q}^{-}$, de la misma forma que los números complejos son una teoría auxiliar para la mecánica cuántica.

(1) $\forall m(\overline{0} \neq sm)$
(2) $\forall m \forall n\, (sm = sn \rightarrow m = n)$
(3) $\forall m\, (\overline{0} \oplus m = m)$
(4) $\forall m \forall n\, (m \oplus sn = s(m \oplus n))$
(5) $\forall m\, (\overline{0} \otimes m = \overline{0})$

[11] En $\mathfrak{Q}^{-}$ existen también cardinales infinitos. Los mismos son necesarios para poder asociar un cardinal a los casi-conjuntos infinitos pertenecientes a la copia isomorfa a ZF que tiene $\mathfrak{Q}^{-}$. Para formalizarlos, la teoría cuenta con un símbolo funcional unario *qc* y axiomas que determinan su comportamiento (que pueden ser los mismo de la teoría con átomos). De esta manera, los casi-cardinales infinitos son ordinales, en cuanto que los finitos no lo son. Estos cardinales infinitos no son pertinentes para los objetivos de este trabajo, ya que deseamos motivar un lenguaje lógico con indiscernibles y las fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje son finitas.

(6) $\forall m \forall n\ (m \otimes sn = (m \otimes n) \oplus m)$
(7) $\forall m(m^0 = s\overline{0})$
(8) $\forall m \forall n\ (m^{sn} = m^n \otimes m)$
(9) Si P es una propiedad que se aplica a q-cardinales, entonces $P(\overline{0}) \wedge \forall m(P(m) \rightarrow P(sm)) \rightarrow \forall m P(m)$.

De esos postulados, podemos derivar los resultados similares a los que derivan Mendelson (2009) y Franco de Oliveira (2004), así como definir cosas habituales de la aritmética en términos de q-cardinales, como $(\overline{2})^n$.

Definición 1 (q-cardinales) Denotaremos los q-cardinales de la siguiente manera:

$$\overline{1} := s\overline{0}$$
$$\overline{2} := \mathrm{s}\overline{1}$$
$$\vdots$$
$$\text{etc.}$$

Así, podemos escribir, como hicimos arriba, cosas como $K(x, \overline{1})$, $K(x, \overline{2})$ o, más generalmente, $K(x, s^n\overline{0})$.

Grupo III - conjuntos y casi-conjuntos

(1) Los axiomas de ZFC para los conjuntos.
(2) $\forall x\ (S\ (x) \rightarrow Q(x))$

Debido a (1), podemos definir los *números naturales en* términos de con- juntos de la manera usual (al estilo de von Neumann): 0 := ∅, 1 := {∅}, etc. Sin embargo, los q-cardinales *no son los* números naturales, o sea, no son ordinales. La idea es *no considerar* los q-cardinales como números naturales, así cuando atribuimos un q-cardinal a un q-conjunto, no l estaremos asociando un ordinal, lo que haría que sus elementos puedan ser discernidos por medio de la biyección.

Definición 2 (Casi-conjuntos legítimos)

$L(x) := \neg S\ (x)$

La definición anterior introduce los *casi-conjuntos "puros" o "legítimos"*, o sea, los casi-conjuntos que no son conjuntos. También se los puede denominar *estrictos*.

Tenemos entonces los siguientes axiomas, recordando que variables como x pueden representar un casi-conjunto legítimo o un conjunto:

(3) $\forall_S x \forall_S y\ (x \equiv y \rightarrow x = y)$[12]
(4) $\exists_L x\ (x \equiv x) \wedge \forall x\ (x \equiv x)$
(5) $\forall x \forall y\ (x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$
(6) $\forall x \forall y \forall z\ (x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$

La indiscernibilidad es una relación de equivalencia, que no colapsa en la identidad. Es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no valida reemplazo de equivalentes.

(7) $\forall y\ (S\ (y) \rightarrow \forall x\ (x \in y \rightarrow S\ (x)))$.

Este axioma dice que los elementos de conjuntos son conjuntos. Así, un casi-conjunto puede pertenecer a un conjunto si y solo si es un conjunto.

(8) [*Esquema de Separación*] Sea α una fórmula de $\mathcal{L}^-$. Entonces
$\forall x \forall m\ (K(x, m) \rightarrow \exists y \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists w \forall n\ (w \in x \wedge z \equiv w \wedge K(y, n) \wedge n \leq m) \wedge \alpha(z)))$

Este axioma nos permitirá formar casi-conjuntos a partir de un casi-conjunto dado. La formulación de este axioma en $\mathfrak{Q}^-$ no es estándar, el lector debe prestar atención. No estaremos formando casi-conjuntos de elementos que pertenecen a un casi-conjunto dado, porque sin la identidad, no podríamos saber si los elementos tomados son de hecho aquellos elementos. Así, la idea es la siguiente: dado un casi-conjunto x con un q-cardinal m y una condición φ (fórmula de $\mathcal{L}^-$), formamos un casi-conjunto con un q-cardinal no mayor que m, cuyos elementos son indiscernibles de elementos de x que satisfacen la condición φ.[13]

Ese casi-conjunto y será denotado del siguiente modo: $[z : \alpha(z)]_x$, observando que su q-cardinalidad no debe exceder la q-cardinalidad de x. En el axioma anterior, $n \leq m$ debe ser interpretado como $\exists p\ (m = n \oplus p)$.

Dados los casi-conjuntos x, z, tales que $z \in x$, y sea α la fórmula definida por $\alpha(w) \leftrightarrow w \equiv z$, del axioma (8) inferimos la existencia de un casi-conjunto $[w : z \in x \wedge w \equiv z]_x$, que es una *clase de equivalencia de* indistinguibles de z que, eventualmente, pero no necesariamente, están en x.[14]

[12] Por supuesto, también se valida la implicación inversa para el caso de conjuntos.

[13] La restricción a que la q-cardinalidad sea menor que m podría ser rechazada, pero no haremos eso.

[14] Recordamos que el q-cardinal de esa clase no es más grande que el q-cardinal de x.

El Esquema de Separación nos permite mostrar la existencia de casi-conjuntos sin elementos, que llamaremos *vacíos*, pero sin la identidad no podemos probar su unicidad. Sin embargo, debido al Axioma de la Extensionalidad Débil, que veremos abajo, podremos probar que todos esos vacíos son indiscernibles. Esto es, la prueba de unicidad del conjunto vacío que se da en ZF no puede ser replicada en $\mathfrak{Q}^{-}$, ya que el axioma de extensionalidad de $\mathfrak{Q}^{-}$ no es suficientemente fuerte. Dentro de los axiomas exigidos al primitivo de casi-cardinal (ver Krause & Jorge, 2024), existe uno para los casi-conjuntos vacíos:

$$\forall x\,(K(x,\,0) \leftrightarrow \neg\exists y(y \in x)). \tag{1}$$

La q-cardinalidad de cualquier conjunto vacío es cero.

Definición 3 (Unitario Débil) *Sea w un casi-conjunto y sean x, y elementos de w. Por medio de la condición $\alpha(t) \leftrightarrow t \in w \wedge t \equiv x$, obtenemos por Separación el casi-conjunto de los indiscernibles de x que pertenecen a w, que denotamos $[x]_w$.*

Entonces nuestro próximo axioma se puede formular así:

(9) Axioma de Par
$\forall_L w \forall x \forall y\,(x \in w \wedge y \in w \rightarrow \exists z \forall t\,(t \in z \leftrightarrow (t \in [x]_w \vee t \in [y]_w)))$

El caso donde w es un conjunto ya está considerado en el axioma de par de ZFC, por eso cuantificamos sobre casi-conjuntos legítimos o puros. En una teoría usual de conjuntos, el axioma de par nos dice que, dados dos conjuntos cualesquiera x e y, existe un conjunto que tiene a ellos como elementos y nada más. Pero ese 'nada más' requiere de la identidad. En $\mathfrak{Q}^{-}$, lo único que podemos hacer es requerir que haya un casi-conjunto con elementos indiscernibles de x *o* y, pero en ese caso perdemos, por así decir, el control de la cantidad de elementos, porque no hay ninguna restricción sobre la cantidad de elementos indiscernibles de un elemento dado. Así, para evitar que hablemos de *clases* (en particular de *clases propias*), tomamos los indiscernibles de x y de y de algún casi-conjunto w dado previamente que tenga un q-cardinal dado. Es claro que no hay, en principio, nada que indique la q-cardinalidad de ese casi-conjunto, salvo que no supera la q-cardinalidad de w. Si $x \equiv y$, incluso puede ser 1.

Denotamos ese casi-conjunto por

$$[x, y]_{w.}$$

(10) [*Axioma de la Extensionalidad Débil*, AED]

$$\begin{aligned}\forall x\forall y\forall n((&(\forall z \in x/\equiv)(\exists w \in y/\equiv)\ (K(z,n) \rightarrow K(w,n)) \wedge \\ &\forall u\forall v\ (u \in z \wedge v \in w \rightarrow u \equiv v) \\ \wedge\ &(\forall w \in y/\equiv)(\exists z \in x/\equiv)\ (K(w,n) \rightarrow K(z,n) \\ \wedge\forall u\forall v\ &(u \in w \wedge v \in z \rightarrow u \equiv v))) \rightarrow x \equiv y\end{aligned} \tag{AED}$$

Note el lector que si utilizamos la relación de identidad (=) en lugar de la relación de indiscernibilidad, entonces las clases de equivalencia de $x/_{\equiv}$ serán unitarias (lo mismo con $y/_{\equiv}$) y el axioma se reduce al Axioma de Extensionalidad de ZFC. En ese caso, $x \equiv y$ no es más que $x = y$. Este axioma dice que si los casi-conjuntos x e y *tienen* la misma cantidad (dada por q-cardinales) de elementos indiscernibles, entonces x e y son indiscernibles. El axioma AED permite probar lo que dijimos anteriormente, que todos los casi-conjuntos sin elementos son indiscernibles. La prueba es inmediata, recordando que el q-cardinal de esos q-conjuntos es $\overline{0}$.

Además, $\mathfrak{Q}^{-}$ cuenta con axiomas de unión, selección de indiscernibles (elección), regularidad, casi-conjunto potencias, etc., que permiten definir las relaciones y funciones necesarias para nuestros objetivos. Los conceptos de secuencia, función, relación, homomorfismo, isomorfismo, etc. pueden definirse en $\mathfrak{Q}^{-}$, de forma que extienden a los clásicos. Es decir, de forma tal que si no se cuenta con entes indiscernibles, colapsan a los respectivos conceptos de ZF.

3. ¿Lenguajes proposicionales con variables indiscernibles?

Apoyándonos en lo dicho en la introducción, en esta sección, fundamentaremos la idea de contar con un lenguaje lógico proposicional con variables proposicionales que puedan ser genuinamente indiscernibles sin que cuenten como una sola. Como sabemos, cuando se explicita la noción de *lenguaje formal* en los libros de lógica, siempre se recurre a recursos conjuntistas. De esa manera, es común hablar de los "conjuntos" de las variables proposicionales, las fórmulas bien formadas, los teoremas, etc. Por supuesto, la idea que queremos sostener no admite un marco conjuntista clásico, ya que las estructuras clásicas suelen ser rígidas, lo que implica, como ya dijimos, una indiscernibilidad simulada. Sin embargo, en una estructura formal no rígida (deformable), como $\mathfrak{Q}^{-}$ podremos apoyar nuestras ideas.

Además de la motivación puramente formal, motivaremos nuestra propuesta con dos casos provenientes de dominios distintos: a) los fundamentos de la mecánica cuántica, en particular, el teorema de Kochen-Specker y b) algunas teorías del lenguaje humano. Influidos por un espíritu

hilbertiano, pensamos que la simple posibilidad lógica es razón suficiente para que este tema sea explorado. Sin embargo, expondremos algunas cuestiones externas que pueden dar lugar a nuestra propuesta. La motivación principal vendrá de los fundamentos de la mecánica cuántica, a través del teorema de Kochen-Specker. Como motivación secundaria, presentaremos algunos estudios nuevos en el área de la lingüística.

3.1. La motivación proveniente de los fundamentos de QM

El teorema de Kochen-Specker (1990) representa un resultado muy importante sobre el formalismo de la mecánica cuántica, que repercute sobre sus interpretaciones. Este teorema impide que el retículo de proyectores cuánticos (lógica cuántica) admita una semántica veritativo-funcional. Este teorema demuestra la imposibilidad de atribuir valores precisos a todos los observables de un sistema cuántico simultáneamente, preservando al mismo tiempo las relaciones funcionales entre observables compatibles: a qué observables se les pueden atribuir valores precisos es algo determinado por el contexto de medición.

Un presupuesto generalmente no tenido en cuenta a la hora de arribar a la contradicción que prueba el teorema de Kochen-Specker (contradicción KS) es la *identidad* de los proyectores en diferentes contextos. Es decir, se presupone que los proyectores son entes con identidad que pueden ser reidentificados en diferentes contextos. Para ver más detalles, recomendamos (Cabello et al., 1996; de Barros et al., 2025). Este tema se vincula directamente con el lenguaje lógico que está detrás del formalismo de espacios de Hilbert: la Lógica Clásica de primer orden con identidad (LPO), que provoca que los operadores del Hilbert sean entes con identidad, es decir, individuos.

La relevancia que tiene la identidad lógica a nivel metafísico para el caso de la mecánica cuántica ha quedado más que demostrada en la extensa bibliografía de Décio Krause y colaboradores (ver citas a lo largo del artículo). La propuesta de esta sección se centra en el rol que la identidad tiene a nivel de los proyectores de los espacios de Hilbert. Que nos centremos en los proyectores se debe a que los mismos forman el lenguaje proposicional de la lógica cuántica. Es decir, vamos a centrarnos en las consecuencias que tiene contar con un lenguaje proposicional cuyas variables sean variables de *individuo*. La elección de los proyectores del espacio de Hilbert como lenguaje proposicional para la lógica cuántica no está exenta de dificultades, algunas de ellas ya han sido consideradas por el propio von Neumann (recomendamos la sección de lógica cuántica relacional de Smerlak, 2006 y su bibliografía correspondiente para más detalles).

El Teorema de Kochen-Specker

Lo presentado en esta sección sigue los lineamientos de Cabello Quintero (2002). Se denomina *teoría de variables ocultas (VO)* a cualquier teoría en la que todo sistema individual tiene un conjunto de variables que, junto con otras variables asociadas al aparato de medición, determinan (de forma no especificada) el resultado de cualquier experimento sobre ese sistema individual. Los valores determinados por la VO para cada experimento posible se denominan *valores de VO.* Supongamos que en nuestra teoría de variables ocultas los *valores de VO* satisfacen las siguientes restricciones:

BKS1 Definitud a priori: un sistema individual puede tener simultáneamente valores de VO precisos para dos observables no compatibles, B *y* β, aunque estos no se puedan medir conjuntamente, es decir, no se pueda preparar un estado con valores bien definidos para ambos.

BKS2 No contextualidad: el valor que las VO asocian a la medida de un observable $\mathcal{A}$ en un sistema individual es independiente de que otros observables compatibles se midan conjuntamente con $\mathcal{A}$.

$$v(\mathcal{A}) = v(\mathcal{A}_{A,B}) = v(\mathcal{A}_{A,\beta}).$$

Restricciones *sugeridas* por la MC sobre los valores de VO.

BKS3 Si la medida de un observable $\mathcal{A}$ sobre un conjunto de sistemas idénticamente preparados da resultados en un conjunto discreto de valores (espectro del operador autoadjunto A), el valor asociado a ese valor en VO, que denotaremos $v(A)$, debe ser uno de tales valores para cualquier sistema individual del conjunto.

BKS4 **Sea** $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...\}$ un conjunto de observables mutuamente compatibles, y supongamos que los operadores que los representan satisfacen cierta relación funcional

$$f_{(A,B,C,..)} = 0.$$

El resultado de cualquier medida conjunta de estos observables será (según MC) un conjunto de valores propios $\{a, b, c, ...\}$, que satisfacen

$$f_{(a,b,c,...)} = 0.$$

(BKS4) Establece que cualquier conjunto de VO para esos observables debe satisfacer la misma relación

$$f(v(A), v(B), v(C), \ldots)) = 0$$

Teorema 1 (BKS) *Para sistemas físicos descritos en MC por espacios de Hilbert de dimensión mayor o igual que tres, no existe ninguna teoría de variables ocultas (VO) que satisfaga a la vez (BKS1), (BKS2), (BKS3) y (BKS4).*

Las hipótesis (BKS3) y (BKS4), que hemos llamado 'restricciones sugeridas por MC', aunque razonables, no son inevitables. Existen teorías de variables ocultas, como la Mecánica bohmiana (ver Solé Bellet, 2010), compatibles con la MC, donde estos supuestos no se cumplen.

El tema de la identidad repercute directamente sobre (BKS2), ya que el valor que un observable B toma en un contexto puede cambiar, no necesariamente por su dependencia con los demás proyectores asociados al contexto, sino porque en el nuevo contexto la valuación toma de entrada un observable indiscernible B', no ya B. Por lo tanto, el valor de salida no será ya idéntico al primer valor, sino indiscernible de él.

A cada estado oculto, le asignamos un homomorfismo $v : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0,1\}$. Esto es, v asigna valores de verdad (0 o 1) funcionalmente a cada proposición en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (proyectores del Hilbert). Ilustremos cómo funciona esta última condición en un contexto de medición determinado. Cada contexto de medición se puede representar mediante una colección máxima $\{P_i\}$ de operadores de proyección unidimensionales mutuamente ortogonales ($P_i P_j = \mathbf{0}$, siempre que $i \neq j$), que forman una descomposición de la identidad:

$$\sum_i P_i = \mathbf{1} \tag{2}$$

Entonces, se cumple que

$$\sum_i v(P_i) = 1 \tag{3}$$

La ecuación anterior implica que, si en un contexto de medición dado $v(P_i) = 1$, entonces, $v(P_j) = 0$, para $j \neq i$. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que, si existen variables ocultas que satisfacen FUNC, también deberían existir valuaciones $v : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0,1\}$ que tiene la propiedad de que $\sum_i v(P_i) = 1$ para cualquier familia $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de proyectores ortogonales de

una dimensión que descomponen la unidad. Pero Kochen y Specker demuestran que esto es imposible. Para ver por qué, consideremos un ejemplo simple (presentado en Cabello et al., 1996) de por qué tales valuaciones no pueden existir.

Considere un modelo cuántico de cuatro dimensiones y los siguientes nueve contextos de medición:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{0,0,0,1} + \hat{P}_{0,0,1,0} + \hat{P}_{1,1,0,0} + \hat{P}_{1,-1,0,0} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{0,0,0,1} + \hat{P}_{0,1,0,0} + \hat{P}_{1,0,1,0} + \hat{P}_{1,0,-1,0} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,-1,1,-1} + \hat{P}_{1,-1,-1,1} + \hat{P}_{1,1,0,0} + \hat{P}_{0,0,1,1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,-1,1,-1} + \hat{P}_{1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,-1,0} + \hat{P}_{0,1,0,-1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{0,0,1,0} + \hat{P}_{0,1,0,0} + \hat{P}_{1,0,0,1} + \hat{P}_{1,0,0,-1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,-1,-1,1} + \hat{P}_{1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,0,-1} + \hat{P}_{0,1,-1,0} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,1,-1,1} + \hat{P}_{1,1,1,-1} + \hat{P}_{1,-1,0,0} + \hat{P}_{0,0,1,1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,1,-1,1} + \hat{P}_{-1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,1,0} + \hat{P}_{0,1,0,-1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,1,1,-1} + \hat{P}_{-1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,0,1} + \hat{P}_{0,1,-1,0} &= \hat{1},
\end{aligned} \tag{4}$$

Cada ecuación anterior representa un contexto de medición diferente. Por ejemplo, en la primera línea, tenemos un observable completo con cuatro resultados posibles, representados por los operadores de proyección $\hat{P}_{0,0,0,1}$, $\hat{P}_{0,0,1,0}$, $\hat{P}_{1,1,0,0}$ y $\hat{P}_{1,-1,0,0}$ (los subíndices representan las coordenadas de los rayos en el espacio de Hilbert). Pero las proyecciones unidimensionales se eligen de manera que cada una de ellas se repita en diferentes líneas. Suponiendo la existencia de una valuación funcional en el conjunto {0, 1} que satisfaga (3), llegamos a una contradicción (ver Cabello et al., 1996 para más detalles). Esto es así, porque sumando todas las valuaciones de las ecuaciones de (4), debido a que cada proyección se repite dos veces, obtenemos un número par a la izquierda y uno impar a la derecha. ¡Nunca puede haber una igualdad! El entrelazamiento es responsable de la contradicción si los valores asignados a cada propiedad se preservan entre los diferentes contextos. En otras palabras, para llegar a la contradicción, debemos asumir que $\hat{P}_{0,0,0,1}$ en la primera línea de (4) es el mismo que $\hat{P}_{0,0,0,1}$ de la segunda línea y, por lo tanto, conserva su asignación de valor entre los diferentes contextos.

En Jorge y de Barros (2025), se muestra de qué manera se puede utilizar la teoría $\mathfrak{Q}^{-}$ para evitar este tipo de contradicciones. Esto es, con-

siderando la posibilidad de contar con proyectores genuinamente indiscernibles y una semántica fundada en $\mathfrak{Q}^{-}$, que se pueda hacer cargo de tal indiscernibilidad, no obtenemos la contradicción. En líneas generales, el razonamiento consiste en definir valuaciones que sean q-funciones, cuyo dominio sea el casi-conjunto formado por todos los proyectores del Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (incluyendo indiscernibles), y tal que la imagen de estas valuaciones sea un casi-conjunto de valores de verdad, *V,* que pueda disjuntarse en valores designados y no designados (o verdaderos y falsos), es decir

$$v : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to V := D \cup N$$

En lugar de contar valores 0 y 1 a cada lado de la igualdad en (4), pasamos a contar la cantidad de designados y no designados. Como las q-funciones mandan indiscernibles en indiscernibles, otorgarán valores de verdad indiscernibles (denotémoslos con *a, b*) a los proyectores $\hat{P}_{0,0,0,1}$ de la primera y segunda línea, ya que ahora no son dos instancias de un mismo proyector, sino dos proyectores indiscernibles. El razonamiento termina cuando tenemos en cuenta que dos valores de verdad indiscernibles, a y b, no deben pertenecer necesariamente al mismo casi-conjunto. Esto es una consecuencia directa de que la indiscernibilidad entre qsets ($\equiv$) no sea una congruencia, es decir, si $a \in D$, podría darse el caso de que $b \in N \wedge a \equiv b$. Por lo tanto, la cuenta de valores designados y no designados ya no debe ser necesariamente diferente. Esto anula el arribo necesario a la contradicción KS para el caso estudiado. De igual forma, se pueden desactivar razonamientos similares que terminen en este tipo de contradicción. Para los detalles de este razonamiento, ver Jorge y de Barros (2025).

De esta manera, los fundamentos de la mecánica cuántica son nuestra principal motivación para incorporar los casi-conjuntos en el lenguaje lógico y, de esta manera, justificar el uso de un lenguaje proposicional con proposiciones indiscernibles.

3.2. Motivación secundaria: frecuencia de aparición de palabras y estadísticas cuánticas

Inspirados por estudios fundamentales de física clásica y cuántica, Aerts et al. (2023) sostienen que las nociones de energía y entropía pueden introducirse de forma consistente en el lenguaje humano. Siendo más explícitos, atribuyendo energía a las palabras según su frecuencia de aparición dentro del texto, se obtiene que los niveles de energía resultantes se distribuyen de forma no clásica; es decir, obedecen a la estadística de Bose-Einstein, en lugar de la de Maxwell-Boltzmann. Según sus autores, esto

es consecuencia de la *genuina indistinguibilidad cuántica de las palabras que aparecen en el texto*. También sostienen que el entrelazamiento cuántico, debido a la forma en que un texto transmite el significado, reduce la entropía de las palabras que aparecen en él. Este comportamiento no puede explicarse teniendo como único recurso la entropía clásica. Los resultados obtenidos en ese artículo se ven apoyados por otros, como Aerts et al. (2024), que pertenecen a una línea de investigación en esta dirección. Según esta línea de investigación, uno de los aspectos más interesantes de la cognición humana se centra en cómo las personas combinan e intercambian conceptos a través del lenguaje y cómo se forman nuevas entidades de significado mediante el lenguaje natural. Estos procesos también son importantes en la cognición aplicada, por ejemplo, la lingüística computacional, el procesamiento del lenguaje natural y la recuperación de información, donde, en particular, el contenido de significado de las palabras y los textos se recupera mediante instrumentos digitales. Desde la década de 1990, se cuenta con evidencia empírica (cuya tasa va en aumento) a favor de que los procesos complejos que subyacen a la cognición humana, que involucran la percepción, el lenguaje, los juicios y las decisiones, no pueden representarse en los formalismos matemáticos originalmente concebidos para abordar los sistemas macroscópicos clásicos.

La razón es que las estructuras cuánticas, mejor que las estructuras clásicas, son capaces de modelizar las características fundamentales de dichas entidades, como la incertidumbre intrínseca, la contextualidad, el genuino indeterminismo y la superposición. Por lo tanto, las mismas no serían solo características de las entidades microscópicas, como se creía originalmente en los inicios de la teoría cuántica. Esta investigación ha llevado a sus autores al desarrollo de una nueva perspectiva teórica para la cognición humana en la que las palabras y su contenido de significado y, por ende, los conceptos, se consideran entidades que pueden encontrarse en diferentes estados e interactuar entre sí y con los contextos de forma no determinista. Desde esta perspectiva, las palabras y los conceptos se comportan como entidades cuánticas, como electrones, fotones, etc., lo que justifica el uso en cognición del formalismo cuántico en el espacio de Hilbert, como vectores unitarios, operadores autoadjuntos, dinámica unitaria, regla de Born probabilística, etc. Las analogías en los ámbitos físico y cognitivo encontradas en sus investigaciones son lo suficientemente profundas como para que decidieran desarrollar una nueva interpretación de la teoría cuántica, en la que las entidades cuánticas en sí mismas no se comportan como objetos físicos, sino como conceptos.

Esta segunda motivación, proveniente del lenguaje y la cognición humana, nos llevaría a proponer de forma directa la genuina indiscerni-

bilidad no solo para el lenguaje formal, sino para el lenguaje natural. Por el momento, nuestra pretensión no es tal, por lo que nos limitaremos al estudio de los lenguajes formales que admitan genuina indiscernibilidad. Quedarán pendientes posibles generalizaciones a lenguajes naturales y también la aplicación de otras características cuánticas, como superposición, entrelazamiento, etc., al dominio de los lenguajes formales.

4. El aspecto sintáctico de nuestra propuesta

En esta sección, exploraremos un posible camino para incorporar el formalismo casi-conjuntista a la definición de lenguaje formal. No pretende ser concluyente ni exhaustiva, sino una posible vía para relacionar estos conceptos.

Las teorías $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q}^{-}$ (también la teoría de quasets QST) mostraron ser un metalenguaje no estándar adecuado para varios formalismos: Nmatrices, espacios de Fock, interpretaciones modales de la mecánica cuántica, etc. Sin embargo, como ya dijimos, estas teorías de casi-conjuntos cuentan con una metateoría clásica. Esto es, tienen lógica de primer orden sin identidad (con identidad, en el caso de QST) en su metanivel. Esto significa que a través de recursos clásicos pueden capturar nociones "no clásicas" como la genuina indiscernibilidad. Esto podría traernos el siguiente inconveniente. Si el lenguaje de $\mathfrak{Q}^{-}$ permite capturar la indiscernibilidad de los entes cuánticos, pero tanto su lenguaje objeto como metalenguaje no cuentan con signos indiscernibles, entonces no hay concordancia de niveles. Los niveles del lenguaje no están siendo una representación fiel de lo que pasa a nivel ontológico. Este camino nos llevaría a incorporar la no clasicidad a los niveles más altos de la metateoría. Sabemos por nuestra experiencia que este camino debe terminar en algún nivel, con un último metanivel clásico. Es decir, podemos demorar la aparición del nivel clásico, pero en algún momento queda establecido.

Para algunos autores, entre ellos el profesor Newton da Costa (ver da Costa et al., 1995), debería exigirse una fuerte concordancia entre todos los niveles (lenguaje, metalenguaje, meta-metalenguaje, etc.).

> A set theoretical semantics for a non-classical logic (e.g., relevant or paraconsistent logics) —besides not being, strictly speaking, a semantics—, being constructed within classical set theory, it reveals itself, from a philosophical perspective, completely unsatisfactory. One reintroduces, so to speak, by the backdoors, exactly what was intended to be left on the entrance! (da Costa et al, 1995, p. 2).

Los grandes desafíos que plantea esta posición son conocidos. Nuestro proyecto consiste en brindarle a las teorías de qsets un metalenguaje no clásico. De esta forma, al ser incorporadas como metalenguaje en teorías como las Nmatrices o la IMH, las mismas contarán con un metalenguaje no clásico y también con un meta-metalenguaje no clásico. Objetivos similares persiguen los lógicos cuando trabajan, por ejemplo, en lógicas *metaclásicas no clásicas*. Estas son lógicas que difieren de la lógica clásica a nivel de inferencias, pero recuperan algunos aspectos importantes de la lógica clásica en cada nivel metainferencial (ver Barrio et al., 2024).

4.1. Explorando alternativas: $\mathfrak{Q}^-$ y los lenguajes formales

Para explicitar de qué manera incorporaremos la teoría $\mathfrak{Q}^-$ en la definición de un lenguaje formal, en primer lugar, nos centraremos en la exposición de Lentin y Gross (1976). Como esta propuesta se enmarca en el ámbito de las gramáticas formales, luego analizaremos una presentación orientada más específicamente a la lógica. El objetivo de la presente sección es mostrar de qué manera podríamos obtener un lenguaje objeto que mantenga concordancia con la indiscernibilidad inherente que se da a nivel ontológico entre las partículas cuánticas. No seremos absolutamente rigurosos ni explicitaremos todos los detalles técnicos, ya que nos alcanzará mostrar que, en el marco de $\mathfrak{Q}^-$, tales lenguajes son una posibilidad lógica. Esperamos que nuestra exploración pueda servirles a otros autores para obtener distintas vías de la presentada.

Comencemos con la definición de conjunto base y elemento base dadas en la sección 1.1.1 de Lentin y Gross (1976).

Llamamos conjunto base $\mathcal{A}$ a un conjunto no vacío y elementos base a sus elementos. Para representar estos elementos hacemos corresponder a cada uno de ellos un signo gráfico (o símbolo material) que será su nombre escrito y tomamos la precaución de que dos elementos diferentes reciban nombres diferentes.

De inicio, antes de llegar a una definición de lenguaje formal (que es a lo que apunta el primer capítulo del libro citado), ya se encuentra una referencia directa a conjuntos. No se explicita en ningún momento de qué tipo de conjuntos se trata, pero se supone que se está trabajando con una metateoría clásica al estilo ZF (o una teoría informal ingenua). Es decir, en esta definición, no se está utilizando la noción de *conjunto* formalizada, *pero* si tuviese que formalizarse, se recurriría a un marco estándar. Por lo tanto, acá tendremos nosotros la primera oportunidad de utilizar $\mathfrak{Q}^-$ para el casi-conjunto base y sus elementos, que ahora tendrán la posibilidad de ser genuinamente indiscernibles. Otro tema que debe ser pensado es el

de atribuir nombres diferentes a elementos diferentes. En este punto, se presupone identidad de tales elementos. ¿Qué pasa si los elementos son indiscernibles? ¿Sus nombres también deben serlo?

A continuación, se consideran los entes que tradicionalmente llamamos "variaciones con repetición de elementos de $\mathcal{A}$". Se trata de secuencias finitas (totalmente ordenadas) cuyos elementos son realizaciones de elementos de $\mathcal{A}$. Si el conjunto base $\mathcal{A}$ contiene tres elementos representados por *a, b y c,* la siguiente expresión es un ejemplo de variación con repetición:

$$b\,a\,c\,a\,b\,a$$

De igual forma, si el casi-conjunto base tuviese tres elementos *a, b* y *c*, junto con varios elementos indiscernibles de cada uno, entonces podríamos representar una posible secuencia como *b a c a b a*, donde las tres '*a*' que aparecen ahora representan tres elementos indiscernibles, no ya tres instancias del mismo elemento. Esto es, estaríamos atribuyendo signos gráficos indiscernibles a elementos indiscernibles. Lo que significaría que la primera '*a*' que vemos y la siguiente no son exactamente el mismo signo gráfico, sino indiscernibles. Esta forma de proceder estaría recurriendo a casi-conjuntos de variables indiscernibles asociados a casi-conjuntos de representaciones gráficas indiscernibles. También podemos optar por representar los entes indiscernibles, no con grafías indiscernibles, sino con letras primadas *a, a′, a″, a‴*, etc. En este caso, la expresión en cuestión podría expresarse como

$$b\,a\,c\,a'\,b'\,a''.$$

No tiene sentido decir si *a, a′* y *a″* son las mismas, ya que los elementos que ellas representan son entes sin identidad, solo puede aplicarse la relación de indiscernibilidad. Lo máximo que podemos decir es que $a \equiv a' \equiv a''$.

Lo que se está planteando es que la indiscernibilidad primitiva, que se da ontológicamente, repercute directamente a nivel de las variables del lenguaje y de sus grafías, aunque para mayor claridad expositiva utilicemos grafías distinguibles (por limitaciones pragmáticas).

Por lo tanto, con lo dicho hasta aquí, queda claro que tenemos al menos tres niveles:

Nivel metafísico: se encuentran los entes sin identidad, como electrones, propiedades cuánticas, conceptos y palabras del lenguaje (según las sugerencias de Aerts), etc.

Nivel lingüístico formal: se encuentran los formalismos de casi-conjuntos, con su metalenguajes y variables "individuales", la gramática formal correspondiente o cierta teoría sobre el lenguaje y los conceptos.

Nivel de la representación gráfica: están los signos gráficos físicos que asociamos a los niveles anteriores.

Tiene sentido que, dependiendo de la fidelidad de la representación utilizada, en cada nivel exista un correlato de la indiscernibilidad del nivel anterior. El problema de contar con un correlato de la indiscernibilidad ontológica en el tercer nivel es el siguiente: si tenemos entes indiscernibles asociados con variables indiscernibles, en expresiones como '$x \equiv x$', deberíamos considerar la posibilidad de que la primera 'x' y la segunda no sean la misma variable, sino variables indiscernibles (representadas con grafías indiscernibles, que confundimos con idénticas por limitaciones pragmáticas). Lo que nos llevaría directamente a reconsiderar la *reflexividad* metateórica de la indiscernibilidad de $\mathfrak{Q}^{-}$.

Resulta útil introducir convencionalmente (siguiendo a Lentin & Gross, 1976) la secuencia vacía que no contiene ninguna realización. Para designar por escrito las secuencias y para representarlas, utilizaremos, respectivamente, símbolos y comillas, a condición de que ni unas ni otras hayan sido ya utilizadas para representar a los elementos base. En el caso del ejemplo anterior, es lícito escribir: A = '$a\ b\ a\ c\ a\ b\ a$'; B = '$a\ c\ c\ c\ a\ b$'; E = ' '

La secuencia vacía podemos asociarla con los casi-conjuntos vacíos de $\mathfrak{Q}^{-}$. En esa teoría, se toma la grafía $\emptyset$ para todos los casi-conjuntos vacíos indiscernibles. ¿Pero qué diferencia habría en lo operacional si se tomaran constantes y grafías indiscernibles, en vez de idénticas? Lo mismo podría ser pensado en general, no solo para los casi-conjuntos vacíos.

Consideremos la siguiente definición de *concatenación de secuencias* (Lentin & Gross, 1976, p. 21):

Dado el conjunto $\mathcal{A}$, consideramos el conjunto $\mathcal{A}^{*}$ de las secuencias finitas formado por realizaciones de elementos de $\mathcal{A}$. Dadas, en este orden, una secuencia A y otra secuencia B, se puede hacer corresponder al par ordenado (A, B) la secuencia C obtenida agotando, en este orden, las realizaciones que figuran en A y después las que figuran en B. Diremos que C se ha obtenido concatenando B a continuación de A. Y escribiremos: $C = AB$

Dadas dos secuencias en $\mathfrak{Q}^{-}$, la concatenación se puede definir utilizando la definición de casi-conjunto par ordenado de $\mathfrak{Q}^{-}$ (ver definiciones 3 y 4 en Krause & Jorge, 2024), en vez de la de ZF. Lo más sutil es tener una buena caracterización de secuencias en $\mathfrak{Q}^{-}$. En Holik et al. (2025) se

presenta una posible caracterización de secuencias para cuando existe un único tipo de entes indiscernibles. Esa caracterización admite una generalización a un número finito de tipos de indiscernibles.

Daremos una breve descripción sobre cómo generar secuencias cuando tratamos con indiscernibles. Para el caso, más que los detalles técnicos, lo que importa es que tal caracterización sea posible en $\mathfrak{Q}^{-}$.

Consideremos un casi-conjunto finito $\mathcal{A}$ con n clases de equivalencia de indiscernibles. Esto es, tenemos n tipos de letras discernibles en nuestro alfabeto. Cada una de ellas puede contar con varios elementos indiscernibles dentro del casi-conjunto finito $\mathcal{A}$. También supondremos que los "lugares" de la secuencia son naturales (o q-cardinales), esto es, distinguibles. Es decir, un elemento de $\mathcal{A}$ puede estar en el lugar 1, en el lugar 2 o en el lugar n.

Una secuencia de m elementos de $\mathcal{A}$ es una q-relación $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{N}_m$ tal que:

- $\langle x, n\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle y, n\rangle \in \mathcal{R} \rightarrow x \equiv y.$
- $\forall n \in \mathcal{N}_m \, \exists x \in \mathcal{A} \, (\langle x, n\rangle \in \mathcal{R})$

Donde N_m *es el* conjunto de las posiciones.

Si $[x]\equiv$ denota la clase de equivalencia del elemento $x \in \mathcal{A}$ (recordemos que $\mathcal{A}$ es finito), definimos los conjuntos $\mathcal{S}_n$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}_n = \{s \in \mathcal{N}_m : \langle \alpha, s\rangle \in \mathcal{R}; \alpha \in [x]_{\equiv}\}$$

De esta manera, todo $\mathcal{S}_n$ es finito, ya que todas las clases de equivalencia lo son, y está constituido por entes distinguibles. Cada s perteneciente a $\mathcal{S}_n$ representa una posición donde se encuentra un elemento cualquiera de la clase finita $[x]/\equiv$. No importa cuál se tome, ya que son indiscernibles. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ con sus $\mathcal{S}_n$ caracterizan una secuencia de n elementos indiscernibles.

Finalmente, llegamos a la definición de lenguaje formal dada en la sección 1.3 de Lentin y Gross (1976):

Definición 4 (Lenguaje formal) *Se llama lenguaje formal definido sobre un conjunto base $\mathcal{A}$ a todo subconjunto del monoide libre $\mathcal{A}^*$ de las secuencias finitas construidas a partir de $\mathcal{A}$.*

Un monoide, en álgebra abstracta, es una estructura algebraica compuesta por un conjunto y una operación binaria $\odot$ que es asociativa,

esto es, $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ y tiene elemento neutro e $(a \odot e = e \odot a = a)$.

En nuestro caso, la operación asociativa es la concatenación de elementos del qset $\mathcal{A}$ y el elemento neutro es la secuencia vacía E.

Podríamos definir el lenguaje formal de la misma manera, ya que tenemos definidas las secuencias y la concatenación en $\mathfrak{Q}^{-}$: un lenguaje formal en $\mathfrak{Q}^{-}$ es un casi-conjunto de secuencias finitas formadas a partir de un casi-conjunto base finito $\mathcal{A}$, junto con la operación asociativa de concatenación. Por lo tanto, hemos mostrado la plausibilidad de definir lenguajes formales con indiscernibles en el marco de $\mathfrak{Q}^{-}$. Dejaremos los detalles técnicos y el análisis de cuándo dos secuencias son indiscernibles (además de las cuestiones de cardinalidad) para un próximo trabajo.

Para terminar esta sección, diremos algunas palabras sobre otra alternativa para caracterizar este tipo de lenguaje formal.

Para caracterizar los lenguajes lógicos de primer orden, Amor-Montaño (2006) comienza definiendo el *tipo* de un lenguaje. Este concepto contiene toda la información no lógica del lenguaje:

Un tipo o signatura es un conjunto ρ de símbolos, de la siguiente forma:

$$\rho = [\bigcup_{1 \leq n} R_n] \cup [\bigcup_{1 \leq m} F_m] \cup C$$

donde R_n es un conjunto de símbolos relacionales de aridad n, Fm es un conjunto de símbolos funcionales de aridad m y C es un conjunto de símbolos de constante.

De la misma forma que la caracterización de Lentin y Gross (1976) presentada anteriormente, esta recurre a la noción de conjunto. Ya dijimos que en el marco de la teoría $\mathfrak{Q}^{-}$, se utiliza la constante $\emptyset$ para denotar cualquiera de los casi-conjuntos vacíos compatibles con el formalismo. Por lo tanto, esto podría motivar la propuesta de un casi-conjunto de constantes C, que admita elementos indiscernibles. A cada casi-conjunto vacío, le podríamos hacer corresponder una constante indiscernible de $\emptyset$, en vez de asignarle la "misma" constante a todos ellos. De la misma forma podría realizarse para otras constantes. Por supuesto, $\mathfrak{Q}^{-}$ admite también la existencia de q-relaciones indiscernibles, lo que motivaría tener casi-conjuntos también para los símbolos relacionales de R_n. A relaciones indiscernibles les podemos asignar símbolos relacionales indiscernibles, ya que nuestro formalismo casi-conjuntista lo permite. De esta manera, tendríamos un casi-conjunto R_n, en vez de su análogo clásico. Por supuesto, estos símbolos indiscernibles lucen idénticos para nosotros, es decir, sus representaciones físicas son in-

discernibles. Por lo tanto, pragmáticamente no podemos darnos cuenta de si contamos con símbolos indiscernibles o idénticos. Pero una limitación pragmática en la representación no puede ser razón suficiente para descartar tal posibilidad, cuando tanto teóricamente como metateóricamente contamos con los recursos necesarios para considerarla.

Por lo tanto, las conclusiones sacadas por esta segunda vía concuerdan con las que hemos sacado anteriormente, aunque aquí no hemos considerado las variables (ni los conectivos), que corresponden a la parte estrictamente lógica del lenguaje. Tenemos recursos formales y motivaciones suficientes para considerar la indiscernibilidad de forma directa sobre los lenguajes lógicos.

5. El rol de los casi-conjuntos a nivel semántico

Como ha quedado de manifiesto con el ejemplo motivador relativo a los fundamentos de la mecánica cuántica, los casi-conjuntos ofrecen una alternativa interesante a la hora de interpretar sistemas cuánticos. Lo discutido en esta sección es independiente de que la teoría de casi-conjuntos utilizada tenga o no un metalenguaje clásico.

Los casi-conjuntos pueden formar parte del metalenguaje tanto de matrices deterministas como no deterministas. Uno de los aportes más significativos que ellos pueden brindar a nuestra semántica es la incorporación de la indeterminación a nivel de las proposiciones, es decir, en fórmulas bien formadas de complejidad nula (sin conectivos). Esto es, si contamos con semánticas matriciales, los casi-conjuntos permiten incorporar indiscernibilidad genuina sobre nuestras variables proposicionales (como se muestra en Jorge & de Barros, 2025), lo que implica directamente una indeterminación sobre los valores de verdad de las proposiciones. Si, en cambio, consideramos una semántica de Nmatrices, no solo arrastramos la indeterminación anterior, sino que incrementamos la propia de los conectivos Nmatriciales, por el uso de q-funciones para los conjuntos de interpretación de estos conectivos.

Consideremos las Nmatrices dinámicas de Avron y Zamansky (2011). Las mismas pueden otorgar un valor de verdad diferente, perteneciente al conjunto de interpretación del conectivo principal de la fórmula en cuestión, a diferentes instancias de una fórmula. Esto puede llevarnos a pensar que el sistema Nmatricial está considerando cada nueva instancia de la fórmula como si fuese una fórmula distinta (con el mismo conectivo principal e idénticos valores de verdad asociados a sus subfórmulas).

Pensemos ahora qué pasaría si esta indeterminación semántica asociada a los conectivos Nmatriciales pudiese aplicarse a fórmulas sin conec-

tivos. En ese caso, tendríamos que diferentes instancias de una fórmula atómica admitirían diferentes valores de verdad (dentro de cierto conjunto). Entonces, ¿qué nos permite fundamentar que son diferentes instancias de una misma fórmula, en vez de ser fórmulas diferentes (o indiscernibles)? La respuesta tiene que ver con nuestra metateoría clásica sostenida en ZF. Todas nuestras fórmulas son *individuos*, es decir, entes con identidad. ZF es una estructura rígida y cualquier semántica y sintaxis sostenida por esta teoría heredará esta propiedad. Por lo tanto, la cuestión de decidir entre fórmulas distintas o idénticas siempre es resoluble. Sin embargo, si en lugar de contar metateóricamente con ZF, tuviésemos una teoría como $\mathfrak{Q}^{-}$, ¿cómo sabríamos si estamos en presencia de dos instancias de una "misma" fórmula o si son dos fórmulas indiscernibles? Esto es, el tema de la indiscernibilidad de las fórmulas bien formadas repercute también en la semántica. En este trabajo, no pretendemos brindar soluciones definitivas, sino mostrar que existen ciertos problemas asociados con la indiscernibilidad, que pueden ser de pertinencia lógica. En pocas palabras, tendría que ser discutido hasta qué nivel (metanivel) lógico tendría sentido llevar este concepto característico de $\mathfrak{Q}^{-}$ y de la ontología cuántica.

Aunque no desarrollaremos el tema aquí, estamos trabajando en una propuesta semántica particular en el marco de $\mathfrak{Q}^{-}$: una semántica kripkeana que incorpore mundos indiscernibles. Es decir, el conjunto de mundos posibles (o imposibles) es considerado un casi-conjunto y las relaciones de accesibilidad entre mundos, q-relaciones en $\mathfrak{Q}^{-}$. Esto puede tener incidencia directa sobre las lógicas modales en general, no solo para las lógicas cuánticas. La estructura conjuntista utilizada en todas nuestras construcciones lógicas afecta directamente sus usos, conclusiones y dominios de acción. El presupuesto de la identidad ha embebido todos nuestros tratamientos teóricos y metateóricos en lógica, filosofía del lenguaje, matemática, física, etc. ¿Podemos justificar de forma sólida tal uso? Dicho de otra manera, ¿hasta qué punto podría justificarse prescindir absolutamente de tal concepto? Si tuviésemos que encontrar un equilibrio en su uso, ¿con qué herramientas contamos para justificar nuestra decisión? Consideramos que tales problemas deben ser reflexionados.

Por un lado, en Jorge et al. (2023) se muestra una posible forma de incorporar la teoría de quasets QST al metalenguaje del formalismo Nmatricial. Por otro lado, en Jorge et al. (2025) se analizan las similitudes estructurales entre QST, RST y $\mathfrak{Q}^{-}$. Lo anterior permite fundamentar el uso de $\mathfrak{Q}^{-}$ metateóricamente en las Nmatrices. $\mathfrak{Q}^{-}$ dispone de todos los recursos formales necesarios para definir una Nmatriz. El rol de los conjuntos de valores de verdad, valores designados, no designados, antidesignados, etc., es tomado por los casi-conjuntos de valores de verdad

correspondientes. Las funciones de interpretación de los conectivos son reemplazadas por q-funciones, quedando para los casos particulares deterministas q-homomorfismos, en vez de homomorfismos. Como $\mathfrak{Q}^-$ es una extensión conservativa de ZF, recuperamos las semánticas clásicas Nmatriciales cuando colapsamos la indiscernibilidad a la identidad. Es decir, recuperamos todo lo que teníamos cuando dejamos fuera del dominio a los entes sin identidad.

¿Está justificado el uso de valores de verdad indiscernibles? ¿Qué interpretación les podemos dar? Lo presentado en Jorge y de Barros (2025), el ejemplo proveniente de los fundamentos de la mecánica cuántica que motivó nuestro trabajo y la discusión final en Jorge y Holik (2023) permiten justificar su uso. Las q-funciones otorgan valores de verdad indiscernibles a elementos indiscernibles de sus dominios. Cuando los indiscernibles se agotan en los idénticos, las q-funciones pasan a ser valuaciones matriciales o Nmatriciales clásicas. Entonces, ¿por qué esto representa un cambio sustancial en la semántica? Principalmente por dos cosas: 1) sin la identidad presupuesta para ciertos entes del dominio, se pueden evitar algunas contradicciones, como mostramos al comienzo de este trabajo y está desarrollado más detenidamente en Jorge y de Barros (2025), 2) como la relación de indiscernibilidad no es una congruencia, permite que valores de verdad asociados con entes indiscernibles del dominio pertenezcan a casi-conjuntos complementarios de valores de verdad. Es decir, los valores asociados con indiscernibles pueden no ser ambos designados (o ambos no designados). Lo que repercute directamente sobre la relación de consecuencia lógica de nuestro sistema.

Por cuestiones de extensión, no desarrollaremos el tema de la relación de consecuencia lógica en $\mathfrak{Q}^-$, pero el lector interesado puede encontrar una sección entera en Jorge et al. (2023). Aunque tal discusión se da en el marco de QST, la mayor parte de sus argumentos son aplicables a $\mathfrak{Q}^-$. Quedará un análisis pormenorizado de sus consecuencias para próximos trabajos.

Un ejemplo particular

Para terminar esta sección, ya presentadas las cuestiones sintácticas y semánticas, mostraremos un ejemplo sencillo de aplicación.

Sea $\mathcal{A}$ el casi-conjunto formado por todos los símbolos indiscernibles de p, q, $\rightarrow$, tomados de una cierta *Nube*, de forma tal que tengamos al menos dos entes indiscernibles de cada símbolo. Este casi-conjunto es el "conjunto" base de nuestro lenguaje formal (definición 4). Podríamos pensarlo como un lenguaje proposicional con dos clases de proposiciones (p,

q), donde cada clase tiene al menos dos indiscernibles, y una única clase de conectivo lógico ($\rightarrow$).[15]

$$\mathcal{A} = [p, q, \rightarrow]$$

Con este lenguaje formal, podemos formar las siguientes fórmulas bien formadas: $p \rightarrow p, p \rightarrow q, q \rightarrow p, q \rightarrow q, p \rightarrow q \rightarrow p$, etc.[16]

Cada una de estas fórmulas cuenta con sus indiscernibles, ya que tanto p como q tienen indiscernibles. Por lo dicho en las secciones anteriores, estas proposiciones indiscernibles podrían denotarse utilizando grafías indiscernibles (a efectos prácticos, la misma grafía) o recurrir a p', q' para denotar indiscernibles de p, q.

Tomemos una tabla como la que se muestra a continuación, donde D denota el casi-conjunto de valores designados y N su complemento:

$\rightarrow$	D	N
D	D	N
N	D	D

(5)

De esta manera, podríamos estar tentados a pensar que la fórmula bien formada $p \rightarrow p$ es un teorema de nuestro sistema. Sin embargo, las cosas no son ahora tan simples. Esto va a depender de las valuaciones (q-funciones) que admitamos como legales. Las q-funciones están obligadas a mandar indiscernibles en indiscernibles, es decir, si a y b son dos elementos indiscernibles del dominio, entonces $f(a)$ y $f(b)$ son dos elementos indiscernibles de la imagen. En nuestro ejemplo, si la valuación (q- función) v otorga un valor designado (t) a la proposición p, $v(p) = t$, está obligada a otorgarle un valor indiscernible de t a cualquier proposición indiscernible de p. El quid de la cuestión es que nada garantiza en $\mathfrak{Q}^-$ (ni en $\mathfrak{Q}$) que dos elementos indiscernibles pertenezcan al mismo casi-conjunto (por esta razón la relación de indiscernibilidad no colapsa a la identidad). Si $v(p) = t \in D$, entonces podría darse el caso de que $v(p') = t' \in N$, con $p \equiv p'$ y $t \equiv t'$.

[15] Aunque podríamos también contar con conectivos indiscernibles, si las reglas para el mismo se presentan de forma sintáctica (axiomas, secuentes, etc.) no cambian las consecuencias que queremos extraer del ejemplo. Por lo tanto, podemos suponer que este conectivo tiene identidad, esto es, es estándar.

[16] Para no complicar el ejemplo, no introdujimos los símbolos de paréntesis, ya que hay formas de que la escritura sea única sin recurrir a los mismos. De todos modos, incorporarlos no cambiaría nada en nuestros razonamientos. Para evitar confusión utilizamos un ejemplo donde no son necesarios (en ninguna escritura).

Esto es, que una letra proposicional sea designada y otra indiscernible de esta sea no designada. Sin identidad, no podemos garantizar que las dos apariciones de p en *"$p \rightarrow p$"* sean dos instancias distintas de la "misma" letra proposicional, en lugar de dos letras proposicionales indiscernibles. Por lo tanto, una de ellas (cualquiera) podría designarse por la valuación y la otra no hacerlo. Lo que claramente muestra que la fórmula en cuestión no es un teorema de mi sistema, a menos que tomemos los recaudos necesarios a la hora de restringir las q-funciones que van a ser utilizadas como valuaciones legales de la semántica. En la sección final de Jorge et al. (2023), puede encontrarse un ejemplo similar utilizando la teoría de quasets QST, en vez de $\mathfrak{Q}-$.

6. A modo de cierre

Vimos que existen motivaciones provenientes de los fundamentos de la mecánica cuántica y del lenguaje natural para justificar cierto uso del concepto de indiscernibilidad a nivel del lenguaje. Aunque esto podría realizarse a nivel del lenguaje en general, nuestros objetivos se centraron en los lenguajes formales. Muchas formalizaciones de los lenguajes lógicos recurren a recursos conjuntistas, lo que nos ha permitido presentar $\mathfrak{Q}^-$, en vez de ZF, como alternativa. Las nuevas posibilidades habilitadas por este formalismo pueden ser utilizadas en diferentes niveles y de diferentes formas. Podemos recurrir a los casi-conjuntos a nivel sintáctico, utilizando secuencias de palabras indiscernibles (o que cuenten con letras de un alfabeto con indiscernibles), considerando constantes indiscernibles (con sus correspondientes símbolos indiscernibles), tomando en cuenta relaciones indiscernibles (y símbolos indiscernibles), etc. Justificar de qué manera limitar su uso para que todo esto no desencadene una *rapsodia de voces inconexas* es una de las tareas que nos proponemos para futuras investigaciones (y proponemos a los filósofos del lenguaje y de la lógica).

Es en este momento donde tenemos que tener en cuenta la posibilidad que brindan los casi-conjuntos a nivel semántico. Si $\mathfrak{Q}^-$ brinda los recursos formales necesarios para fundar una semántica que permita sostener el edificio sintáctico con indiscernibles, podemos movernos con tranquilidad. En este sentido, $\mathfrak{Q}^-$ nos permite construir semánticas no deterministas que diferencien constantes y proposiciones indiscernibles, asignándoles valores de verdad, que, aunque indiscernibles, pertenezcan a casi-conjuntos de valores de verdad complementarios (esto, gracias a que la indiscernibilidad no es una congruencia). Estas bonanzas de una semántica en $\mathfrak{Q}^-$ ha permitido disolver la contradicción KS, como hemos mostrado arriba. La limitación pragmática asociada con la representación física de caracteres

indiscernibles, es decir, trabajar con símbolos gráficos indiscernibles, puede superarse atribuyendo grafías que distingamos (como a *y* a'), sabiendo que corresponden a entes (constantes, variables, proposiciones, relaciones) indiscernibles. O también, tomando cada nueva aparición de un signo x *como* indiscernible de todos los demás y directamente no considerando la identidad de los mismos. Por ejemplo, si tenemos la fórmula '$\forall x\ (x \equiv x)$', tomar a cada una de las x que aparecen como grafías indiscernibles correspondientes a variables indiscernibles, que se asocian en el universo de cuantificación con entes genuinamente indiscernibles de nuestra ontología. Esto es, una concordancia plena entre representación gráfica, matemática (y metamatemática) y ontológica.

Estos razonamientos no los aplicaríamos (y habría que justificar por qué) a la construcción de fórmulas bien formadas o teoremas (considerados como secuencias de *fbf* que cumplen las reglas de inferencia y parten de axiomas). ¿Tendría sentido decir que dos teoremas son indiscernibles? Es decir, que dos secuencias de fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje sean indiscernibles (y no idénticas), nos habilitaría a decir que dos teoremas son indiscernibles (sin la identidad a ese nivel del lenguaje no podríamos decir que son el mismo ni que cuentan como uno). No queda claro cómo interpretar ni qué uso darles a estas inferencias indiscernibles.

Tampoco qué utilidad podrían tener relaciones de consecuencia lógica indiscernibles. Como la consecuencia lógica es una relación, es decir, un conjunto de pares ordenados, sus análogos en $\mathfrak{Q}^-$ son casi-conjuntos de pares ordenados, que, por definición, son las q-relaciones. Es decir, sin ningún inconveniente técnico, podríamos tener q-relaciones de consecuencia lógica en nuestro formalismo. Aplicando el Axioma de Extensionalidad débil de $\mathfrak{Q}^-$ (AED), tendríamos que dos q-relaciones de consecuencia lógica son indiscernibles cuando comparten sus clases de equivalencia y cada una de estas clases tiene la misma casi-cardinalidad. Esto es, para cada par ordenado $[a, b]$[17] de una de las relaciones, tenemos un par indiscernible del primero $[c, d]$ perteneciente a la otra relación, donde nada sabemos sobre la cardinalidad de estos pares, excepto que es la misma. Por lo tanto, si contamos con fórmulas bien formadas indiscernibles, inevitablemente tendremos relaciones de consecuencia lógica indiscernibles. La cardinalidad de inferencias válidas y teoremas dependerá de la Nube de donde se tomen los indiscernibles.

Todos estos temas (y muchos otros que se desprenden de lo discutido) merecen ser considerados. Sin lugar a dudas, tanto la ontología de entes

[17] En este ejemplo omitimos intencionalmente el marco de donde se toman los indiscernibles para no complicar demasiado el razonamiento.

indiscernibles como los formalismos inspirados en ellos abren puertas que pueden ser de provecho para el lógico si sabe de qué manera implementar las alternativas que ellas muestran y cómo limitarlas.

Financiación

Este trabajo fue parcialmente subsidiado por la Beca Interna de Finalización de Doctorado otorgada por CONICET.

Agradecimientos

Estoy muy agradecido con los revisores anónimos por su lectura cuidadosa y recomendaciones. Sin lugar a dudas, hicieron que este artículo llegara al lector de una forma más amigable. También agradezco a Décio Krause por su disposición para responder preguntas.

Referencias

Aerts, D., Aerts Argüelles, J., Beltran, L., & Sozzo, S. (2023). Development of a thermodynamics of human cognition and human culture. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, *381*(2256), 20220378. https://doi.org/10.1098/rsta.2022.0378

Aerts, D., Aerts Argüelles, J., Beltran, L., Sassoli de Bianchi, M., & Sozzo, S. (2024). The origin of quantum mechanical statistics: Some insights from the research on human language. *arXiv preprint*. arXiv:2407.14924

Amor-Montaño, J. (2006). *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de completud*. Las Prensas de Ciencias.

Avron, A., & Zamansky, A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. En D. Gabbay & F. Guenthner (Eds), *Handbook of Philosophical Logic* (pp. 227-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0479-4_4

Barrio, E., Fiore, C., & Pailos, F. (2024). Meta-classical non-classical logics. *The Review of Symbolic Logic*, *17*(4), 1146-1171. https://doi.org/10.1017/S175502032400011X

Cabello, A., Estebaranz, J., & García-Alcaine, G. (1996). Bell-Kochen-Specker theorem: A proof with 18 vectors. *Physics Letters A*, *212*(4), 183-187. https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00134-X.

Cabello Quintero, A. (2002). *Pruebas algebraicas de imposibilidad de variables ocultas en mecánica cuántica*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones. https://hdl.

handle.net/20.500.14352/62875

Carnielli, W., & Coniglio, M. E. (2016). Paraconsistent set theory. En *Paraconsistent Logic: Consistency, contradiction and negation* (pp. 345-367). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33205-5_8

da Costa, N., Bueno, O., & Béziau, J.-Y. (1995). What is semantics? A brief note on a huge question. *Sorites, 3*, 43-47. https://sorites.org/Issue_03/item5.htm

*da Costa, N. C. A. (1980). Ensaio sobre os fundamentos da l*ógica. HUCITEC-EdUSP.

Dalla Chiara, M. L. & Toraldo di Francia, G. (1993). Individuals, kinds and names in physics. En G. Corsi, M. L. Dalla Chiara & G. C. Ghirardi (Eds.), *Bridging the gap: Philosophy, mathematics, and physics* (pp. 261-283). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2496-6_13

de Barros, J. A., Jorge, J. P., & Holik, F. (2025). On the assumptions underlying ks-like contradictions. En D. Krause & J. R. Becker Arenhart (Eds.), *Individuals and non-individuals in quantum theory* (pp. 69-83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-032-01408-5_5

Franco de Oliveira, A. J. (2004). *Lógica e aritmética.* Ed. Un. Brasília.

French, S., & Krause, D. (2006). *Identity in physics: A historical, philosophical, and formal analysis*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/0199278245.001.0001

Holik, F., Jorge, J. P., Krause, D., & Lombardi, O. (2022). Quasi-set theory: A formal approach to a quantum ontology of properties. *Synthese*, *200*(5), 401. https://doi.org/10.1007/s11229-022-03884-8

Holik, F., Jorge, J. P., & Massri, C. (2025). Indistinguishability *right from the start* in standard quantum mechanics. En D. Krause & J. R. Becker Arenhart (Eds.), *Individuals and non-individuals in quantum theory* (pp. 45-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-032-01408-5_4

Jech, T. (2003). *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X

Jorge, J. P., & de Barros, A. (2025). Nmatrices cuánticas, cuasiconjuntos y el teorema de Kochen-Specker. *Teorema, Revista Internacional de Filosofía, 44*(2), 1-28. https://doi.org/10.30827/trif.33871

Jorge, J. P., & Holik, F. (2023). Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, II. *Teorema: Revista internacional de filosofía, 42*(1), 149-169.

Jorge, J. P., Holik, F., & Krause, D. (2023). Un acercamiento a las semánticas Nmatriciales basadas en QST. *Principia: An international journal of epistemology*, *27*(3), 539-607. https://doi.org/10.5007/1808-1711.2023.e91732

Jorge, J. P., Holik, F., & Krause, D. (2025). Relating quasi-sets and rough sets: from quantum entities to AI. *International Journal of Theoretical*

Physics, 64, 289. https://doi.org/10.1007/s10773-025-06165-5

Kochen, S. & Specker, E. P. (1990). The problem of hidden variables in quantum mechanics. En G. Jäger, H. Läuchli, B. Scarpellini & V. Strassen (Eds.), *Ernst Specker Selecta* (pp. 235-263). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9259-9_21

Krause, D. (1990). Não-reflexividade, indistinguibilidade e agregados de Weyl. Tesis doctoral. Universidade de São Paulo.

Krause, D. (1992). On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *33*(3), 402-411. https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093634404

Krause, D. (2023). A remark on quasi-automorphisms and deformable structures in quasi-set theory and its account to the logical foundations of quantum theory. *Pre-prints.org*. https://doi.org/10.20944/preprints202306.1583.v1

Krause, D., & Jorge, J. P. (2024). Sobre una teoría 'pura' de casi-conjuntos y su aplicación a una ontología cuántica de propiedades. *Principia* (en prensa).

Krause, D., Jorge, J. P., & Lombardi, O. (2025). A quasi-set theory without atoms and its application to a quantum ontology of properties. *Synthese, 207*, 6. https://doi.org/10.1007/s11229-025-05347-2

Lentin, A., & Gross, M. (1976). *Nociones sobre las gramáticas formales*. Tecnos.

Mendelson, E. (2009). *Introduction to mathematical logic*. CRC Press.

Rubin, J. E. (1967). *Set theory for the mathematician*. Holden-Day.

Smerlak, M. (2006). *Relational quantum mechanics*. Internship Report.

Solé Bellet, A. (2010). Realismo e interpretación en mecánica bohmiana. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. https://hdl.handle.net/20.500.14352/47279

Suppes, P. (1972). *Axiomatic set theory*. Dover Publications.

Weber, Z., Badia, G., & Girard, P. (2016). What is an inconsistent truth table? *Australasian Journal of Philosophy*, *94*(3), 533-548. https://doi.org/10.1080/00048402.2015.1093010

Zermelo, E. (1967). Investigations in the foundations of set theory I. En J. van Heijenoort (Ed.), *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic 1879-1931* (pp 199-215). Harvard University Press.

Recibido el 9 de junio de 2025, revisado el 25 de septiembre de 2025, revisado el 3 de noviembre de 2025, aceptado el 26 de noviembre de 2025.