LA TEORÍA DE LOS INVARIANTES Y EL ESPACIO INTUITIVO EN *DER RAUM* DE RUDOLF CARNAP

Álvaro J. Peláez Cedrés
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Cuajimalpa

Resumen

La consecuencia más difundida de la revolución en la geometría del siglo XIX es aquella que afirma que después de dichos cambios ya nada quedaría de la vieja noción de espacio como "forma de la intuición sensible", ni de la geometría como "condición trascendental" de la posibilidad de la experiencia. Este artículo se ocupa del intento de Rudolf Carnap por articular una concepción del espacio intuitivo que, al tiempo que se mantiene dentro del paradigma kantiano se hace eco de algunos resultados obtenidos en las ciencias formales, específicamente de la teoría de grupos en su aplicación a la geometría (la teoría de los invariantes de Klein). Su concepción se encuentra antecedida por los esfuerzos de Helmholtz, Poincaré, Cassirer y Husserl.

PALABRAS CLAVE: Geometría; A priori; Invariantes; Kantianismo.

Abstract

The most diffused consecuence of the revolution in the geometry of the XIX century is what claims that after this changes anything would remain of the old notion of space as "the form of the sensible intuition", neither of geometry like "trascendental condition" of the possibility of experience. This paper deal with the Rudolf Carnap's attempt to articulate a conception of the intuitve space that, at the time that it mantains within kantian paradigm, it echoes of some results obtained in the formal sciences, specifically of the theory of groups in its application to geometry (Klein's theory of invariants). Its conception is preceded by the efforts of Helmholtz, Poincaré, Cassirer and Husserl.

KEY WORDS: Geometry; A priori; Invariants; Kantianism.

1. Introducción

Un lugar común en la historia de la noción de espacio y de sus fundamentos epistemológicos ha sido la idea de que después de Kant y como resultado de los desarrollos en la geometría del siglo XIX, los cuales incluyen el surgimiento de las geometrías no-euclideanas y la formalización de la geometría euclideana por parte de Hilbert, ya nada quedaría de la vieja noción de espacio como "forma de la intuición sensible", ni de la geometría como "condición trascendental" de la posibilidad de la experiencia. Sin embargo, en el siglo XIX mismo y aún entre algunos de los matemáticos implicados en esos desarrollos, se intentó salvar parte del espíritu subyacente a la noción kantiana de intuición espacial. El problema con el que se enfrentaron dichos intelectuales era el de congeniar, por un lado, la idea de que el espacio es una estructura subjetiva *a priori* que condiciona la experiencia del mundo físico, y por otro, la de que dicha estructura es lo suficientemente amplia como para dar cabida a por lo menos los tres casos clásicos de geometrías de curvatura constante, a saber, la geometría euclideana, la elíptica y la hiperbólica. En otras palabras, el desafío era mantener la idea kantiana del espacio como forma *a priori* de la intuición, pero despojándola de las especificaciones que Kant mismo le había asignado a dicha estructura, a saber, la del espacio exclusivamente euclidiano.

Lo que posibilitó que estas ideas fructificaran fue la aparición de dos nuevos conceptos en las matemáticas, en el álgebra en particular, a saber, los conceptos de *transformación* y de *grupo de transformaciones*.

Entre los filósofos más sobresalientes que en el siglo XIX intentaron aplicar las virtudes de dichos conceptos a las investigaciones epistemológicas sobre la naturaleza del espacio encontramos a Helmholtz y a Poincaré.

Asimismo, los conceptos de transformación y de grupo de transformaciones se convirtieron en la base de la reforma integral de la geometría que Felix Klein propuso en su prueba de admisión a la Universidad de Erlangen en 1872, y que se conoce desde entonces como *Programa de Erlanger* o también como *teoría de los invariantes geométricos.*[1]

A comienzos del siglo XX encontramos al menos dos corrientes filosóficas que se hicieron eco tanto de estos importantes resultados de las ciencias formales, como del uso epistemológico que Helmholtz y Poincaré hicieron de los mismos, a saber, el neo-kantianismo de la escuela de Marburgo y la fenomenología. Fundamentalmente bajo la influencia de la teoría de los invariantes de Klein, Cassirer y Husserl, los líderes de dichas escuelas articularon partes cruciales de sus concepciones filosóficas. En su obra maestra epistemológica de 1910,[2] Cassirer concibe su teoría del concepto y de lo *a priori* bajo dicha influencia. En el caso de Husserl, su concepto de lo que en *Ideas* llama "intuición eidética"

[1] Como es bien sabido, con posterioridad, y debido principalmente al nombre de Emmy Noether, los mismos conceptos fueron de enorme importancia en el desarrollo de la física teórica.

[2] Me refiero, claro está, a su *Concepto-sustancia y concepto-función* (citado como 1923a).

(*Wessenerschauung*), ya articulada en las *Investigaciones lógicas* bajo el nombre de "abstracción idealizadora", es de clara inspiración en los resultados matemáticos a los que referimos.[3]

Ahora bien, en 1922, un joven filósofo alumno de Bruno Bauch, de Frege y que también había atendido a Husserl en Friburgo, presenta en el departamento de filosofía de la universidad de Jena una tesis sobre el espacio que suplantaba la que con anterioridad había sido rechazada tanto por el departamento de física como por el de filosofía de la misma universidad, y que versaba sobre los "fundamentos axiomáticos de la cinemática".[4] Su nombre, Rudolf Carnap.

En esta tesis, el joven Carnap presenta un diagnóstico acerca de la confusión que, a su manera de ver, reinaba en las discusiones sobre la naturaleza del espacio durante aquellos años. En su opinión, los malentendidos que dominan la discusión sobre la naturaleza del espacio, provienen del hecho simple y llano de que los participantes en la disputa están refiriéndose a diferentes tipos de espacio. Por lo tanto, en orden a clarificar la situación, debemos comenzar por distinguir cuidadosamente esas diferentes clases de espacios, para luego resolver el problema de sus interrelaciones. Los tres tipos de espacio que distingue son: espacio formal, espacio intuitivo y espacio físico. A su vez, estas diferentes clases de espacio se corresponden con el objeto de estudio de matemáticos, filósofos y físicos respectivamente.

Este artículo tiene como propósito analizar la concepción de Carnap del espacio intuitivo. El abordaje será a la luz de las consideraciones esbozadas en esta introducción, a saber, del complejo de ideas constituido por los desarrollos en las matemáticas del siglo XIX y de su recepción filosófica a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, y el resultado será que, desde el punto de vista de Carnap, el espacio intuitivo, cuya estructura es conocida a través de un proceso de intuición eidética en el sentido de Husserl, es un concepto *a priori* en el sentido de Cassirer, esto es, un invariante de la experiencia.

La estructura de mi investigación será la siguiente: en primer lugar, presentaré de una manera altamente esquemática los lineamientos generales de la teoría de grupos y su uso por parte de filósofos como Helmholtz

[3] En las *Investigaciones lógicas* y otros estudios sobre geometría, Husserl refiere directamente a Grassman, Riemann, Lie y Helmholtz.

[4] De acuerdo con Carnap, esta dificultad para ubicarse con precisión dentro de uno u otro campo de estudio, delataba sus tendencias, tanto por las ciencias como por la filosofía, y por sus intenciones de trazar "puentes" entre ambas. Véase su (1992).

y Poincaré para la articulación de la noción de espacio.[5] En segundo lugar, expondré la teoría de los invariantes de Klein y consideraré la forma en que la misma se encuentra en la base de las concepciones de Cassirer y Husserl. Finalmente, consideraré la propia concepción de Carnap de la intuición espacial como forma *a priori* de la experiencia, la cual se encuentra fuertemente influida por ideas de aquellos filósofos.

2. El concepto de grupo y la teoría del espacio en el siglo XIX

Los conceptos de *transformación* y *grupo de transformaciones* se deben a dos prominentes matemáticos ingleses, Arthur Cayley (1821-1895) y James Sylvester (1814-1897.[6]

Antes de dar una definición precisa de transformación, es necesario explicar la idea de mapeo.

Definición: Un mapeo de un conjunto A en un conjunto B es un emparejamiento de elementos de A (rango) y un subconjunto de B (imagen) de modo que cada elemento de A es emparejado con exactamente un elemento del subconjunto de B, y cada elemento de tal subconjunto de B es emparejado con al menos un elemento de A.

El caso especial de un mapeo de un conjunto A en un conjunto B para el cual cada elemento de B es emparejado con al menos un elemento de A se llama un mapeo del conjunto A *sobre* el conjunto B.

Definición: f es un mapeo de un conjunto A en un conjunto B si para todo elemento a de A existe un único elemento b de B que se empareja con a; este emparejamiento se denota por $f(a) = b$. El conjunto A se llama el dominio de f, y el conjunto B el codominio de f.

Definición: Un mapeo f de A a B es *uno a uno* si cada elemento en el rango de f es la imagen de exactamente un elemento de A. Esto es, si $f(a) = f(c)$, entonces $a = c$.

[5] Quiero dejar claro que procedo separando la exposición del concepto de transformación y grupo de transformaciones de la teoría de los invariantes de Klein por dos razones: en primer lugar porque claramente son dos cosas diferentes, la segunda no es más que una aplicación a la geometría de dichos conceptos. Como es bien sabido, el concepto de transformación y de grupo de transformaciones ha tenido variadas aplicaciones en diferentes campos del conocimiento como la física, la química, la biología, etc. La segunda razón para separar la exposición se debe a que Helmholtz y Poincaré no utilizan los resultados del programa de Erlanger (el primero ni siquiera lo conoció) para articular su concepción del espacio.

[6] Para detalles acerca de la historia de estos conceptos, así como de los diferentes desarrollos en los mismos, véase Kline (1972) cap. 49, Meserve (1955), y Smart (1994).

Definición de transformación: una transformación es un mapeo de A sobre B tal que cada elemento de B es la imagen de exactamente un elemento de A. Es decir, una transformación es un mapeo que *es uno a uno* y *sobre.*

Definición de grupo de transformaciones: un grupo de transformaciones de un conjunto A sobre sí mismo es un conjunto S no vacío junto con una operación[7] tal que, siendo f, g y h transformaciones:

1. Si f y g están en S, entonces el producto $f.g$ y $g.f$ están en S. (Cerradura)
2. Si f, g, y h están en S, luego $(f.g).\ h = f.\ (g.h)$. (Asociatividad)
3. Hay un único elemento en S que satisface $\mathrm{I} f = f \mathrm{I} = f$ para todo f en S. (Identidad)
4. Dado f en S, existe un único elemento f^{-1} que satisface $f^{-1} f = f\, f^{-1} = \mathrm{I}$. (Inverso)

La propiedad de *cerradura* significa que el producto de cualesquiera dos transformaciones en el conjunto es también una transformación en el conjunto.

La segunda de las propiedades es la de *asociatividad*. La notación de $f.(gh)$ y $(fg).h$ indica el producto de las mismas tres transformaciones en el mismo orden. Por ejemplo:

Considérese las siguientes tres transformaciones que han sido definidas como sigue:

$$
\begin{aligned}
&f : \mathrm{x} \to \mathrm{x} + 3\\
&g : \mathrm{x} \to \mathrm{x} - 2\\
&h : \mathrm{x} \to 2\mathrm{x}\\
&f\,(gh) : \mathrm{x} \to (\ [2\mathrm{x}] - 2\ ) + 3 = 2\mathrm{x} + 1\\
&(fg)\,h : \mathrm{x} \to 2\ \mathrm{x} + (-\ 2 + 3) = 2\mathrm{x} + 1
\end{aligned}
$$

La tercera propiedad establece la existencia de una única *identidad*. Dado que el producto de una transformación y la operación de identidad tiene como resultado la transformación original, el efecto de la operación de identidad es dejar a cada punto invariante (esto se conoce también como la *operación de no hacer nada*).

La cuarta propiedad establece la existencia de una única transformación *inversa* para cada transformación del conjunto. Dado que el

[7] La operación puede ser la multiplicación o la adición. Si este es el caso, entonces el grupo es llamado “conmutativo” o “grupo Abeliano”. Aquí sólo consideraré el grupo que resulta de establecer a la multiplicación como operación, el cual es el más común.

producto de una transformación y su inversa es la identidad, el efecto de la inversa es deshacer la transformación, retornando cada punto a la posición original.

Al igual que ya lo había sido el número, el concepto de grupo se vio como un principio fundamental de orden,[8] con la diferencia que lo que se trae a una unidad no son elementos sino operaciones. La creación de la serie de los números naturales empezó con haberse fijado un primer elemento y con haberse dado una regla que permite generar siempre nuevos elementos mediante su repetida aplicación. Todos los elementos fueron unidos en una totalidad unitaria en virtud de que cada conexión efectuada entre elementos de la serie de los números "define" un nuevo número. Si formamos la suma de dos números a y b o bien su diferencia, su producto, etc., los valores $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ no salen de la serie básica sino que pertenecen a ella misma ocupando una posición determinada en ella, o bien pueden ser referidos indirectamente a los elementos de la serie básica de acuerdo con reglas fijas. Así pues, por más que avancemos a través de nuevas síntesis, tenemos la seguridad de que el marco lógico de nuestra investigación no será nunca completamente roto, por más que se tenga que ampliar. La idea del reino unitario de los números significa justamente que la combinación de operaciones aritméticas, por numerosas que sean, conducen siempre finalmente a elementos aritméticos. En la teoría de grupos se eleva el mismo punto de vista a un grado de estricta y verdadera universalidad, ya que en dicha teoría se ha eliminado, por así decirlo, el dualismo de "elementos" y "operación"; la operación misma se ha convertido en elemento. Así como Kepler llamó al número el "objeto del espíritu" que nos permite ver la realidad, podemos decir también válidamente de la teoría de grupos, la cual ha sido llamada el ejemplo más brillante de matemática puramente intelectual,[9] que ella ha hecho posible la interpretación de ciertas conexiones espaciales, físicas y perceptivas.

Ahora bien, el primer intento para aplicar ciertas especulaciones matemáticas concernientes al concepto de grupo al problema de la intuición espacial fue hecho por Helmholtz en su ensayo de 1868 "Sobre los hechos que están en la base de la geometría". No obstante, Helmholtz no fue capaz de ver el nuevo problema que había planteado con completa precisión ni comprender su verdadera importancia. Porque cuando

[8] No sólo los algebristas vinculados al desarrollo de este concepto, Cayley, Sylvester, y Lie, sino como veremos a continuación también Helmholtz, Poincaré, Klein y muchos otros, utilizaron el concepto de grupo y sus propiedades como una verdadera teoría del orden aplicada a diferentes universos de objetos.

[9] La expresión pertenece a H. Weyl. Vid. su (1965).

Helmholtz escribió su ensayo, el concepto de grupo todavía no había sido reconocido como el instrumento universal del pensamiento matemático que fue más tarde. No obstante, el trabajo de Helmholtz contiene varias y profundas intuiciones acerca del papel que dicho concepto podría desempeñar en áreas de investigación tan diversas como las matemáticas y la teoría de la experiencia.

Desde el comienzo de sus investigaciones su atención estuvo dirigida al problema de si y en qué medida la experiencia contribuye a conformar la noción de espacio. Su posición al respecto se inscribe dentro de la tradición kantiana en la medida en que sostuvo la tesis de que el espacio es una forma *a priori* de intuición, pero se apartó de Kant en tanto afirmó que esa forma de intuición debe ser entendida como "vacía de contenido, y dentro de la cual cualquier contenido arbitrario de la experiencia se conformaría" (Helmholtz 1977: 2). Esto es, de acuerdo con Helmholtz, la forma *a priori* designa meramente la posibilidad de coexistencia general, y tan pronto intentamos especificar esta posibilidad –y sólo a través de tales especificaciones puede aplicarse y ser fructífera para los problemas de la física– nos encontramos enfrentados con un conjunto nuevo de problemas. Debemos ahora introducir una determinación métrica, la cual a diferencia de la forma general del espacio no puede ser suministrada *a priori* sino en diferentes formas. Toda medida concreta depende de la aceptación de ciertos axiomas de congruencia entre diferentes partes del espacio. El examen de esos axiomas muestra que implican ciertas presuposiciones por las cuales las figuras pueden ser desplazadas sin transformaciones. Así, Helmholtz enfrenta el problema de encontrar la forma más general de una variedad multidimensional en la cual los cuerpos rígidos o sistemas de puntos pueden ser desplazados sin cambiar sus formas. Por lo tanto, los axiomas que se encuentran en la base de toda geometría pueden ser interpretados como enunciados concernientes a determinados grupos de movimientos, y la validez objetiva de dichos axiomas no depende sólo de la forma *a priori* del espacio, sino de los experimentos desarrollados con los cuerpos rígidos. Parece que en un espacio tridimensional de curvatura constante los desplazamientos posibles dependen de seis parámetros. Los movimientos en el espacio tridimensional son ∞^6, y forman un grupo, digamos G_o. Se sabe que este grupo posee un invariante, pero la forma de este invariante en términos de las coordenadas x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 de los puntos, no se sabe *a priori*. Este invariante, la distancia entre dos puntos infinitesimalmente cercanos,[10]

[10] Esta es la fórmula de la distancia de Riemann $ds = \sqrt{(d_x)^2}$, la cual éste obtuvo por medios estrictamente analíticos. Como es sabido, a pesar de las coincidencias entre ambos

se obtiene a través del estudio del grupo de movimientos desarrollados por los cuerpos rígidos en el espacio.[11]

Es desde el punto de vista de esta concepción fundamental que Henri Poincaré enfrentó el problema del espacio y de la percepción espacial. Pero de acuerdo con Poincaré, la relación entre concepción y percepción es diferente de lo que lo era en la doctrina de Helmholtz. En efecto, en opinión de Poincaré la experiencia no es suficiente para elucidar en su totalidad el concepto de grupo. Para explicitar su verdadera naturaleza debemos pensarlo como una ley originaria de la mente humana y no como parte de la naturaleza de las cosas externas. Ya en un trabajo de 1898, Poincaré no duda en reconocer el concepto de grupo como un concepto *a priori* fundamental. Allí dice que dicho concepto "…existe en nuestra mente con anterioridad a toda experiencia" (Poincaré 2002: 30), y que "no es impuesto a nosotros por la naturaleza, sino por nosotros a la naturaleza" (Ibíd.: 12). Pero la importancia que Poincaré le concede a dicho concepto en la constitución del espacio sensible es notable. En su opinión, la noción de espacio sensible surge del reconocimiento de que nuestras sensaciones varían y de las leyes que rigen tal variación. Aún más, dicha noción depende de nuestra capacidad para distinguir los dos tipos de cambios que pueden sufrir nuestras impresiones, y decimos que éstas cambian debido tanto a que los objetos que las causan han sufrido un cambio de estado como a que esos mismos objetos han sufrido un desplazamiento. De este modo, la noción clave, al igual que para Helmholtz, es la noción de grupo de desplazamientos.

Ahora bien, las leyes que rigen esos desplazamientos no surgen, para Poincaré, como un hecho bruto desde la experiencia, sino que son una operación activa del espíritu que intenta introducir esos resultados brutos de la experiencia en "una forma preexistente, en una categoría" (Ibíd.: 10), cuya operación consiste en identificar dos cambios como poseedores de una característica común, aunque no posean tal característica más que desde un punto de vista aproximado.

De acuerdo con Poincaré, lo que el sujeto experimenta inmediatamente es un flujo casi ininterrumpido de impresiones sensoriales.

pensadores, Helmholtz parte de una base radicalmente diferente, a saber, de ciertos *hechos que están en la base de la geometría* y no de *hipótesis*. Para una comparación entre las concepciones de Riemann y Helmholtz véase Richards (1977) y Torretti (1978).

[11] Como mencioné antes, la utilización de Helmholtz del concepto de grupo es incipiente. Su concepción fue mejorada, ya con las herramientas propias de la teoría de grupos, por S. Lie, D. Hilbert y H. Weyl. Este último dio axiomas teorético-grupales para variedades más generales que la euclideana o riemanniana. Véase especialmente su (1922).

Surge entonces la pregunta acerca de qué hace posible la diferenciación que establecemos entre los movimientos espaciales de un objeto y sus alteraciones cualitativas. Las claves meramente psicológicas son las mismas en ambos casos. Sólo mediante la alteración de las imágenes perceptuales somos informados de un cambio, tanto si éste consiste en que el objeto es movido en relación a nuestros órganos corporales, como si se trata de una modificación del objeto mismo. Debemos encontrar otro criterio que nos permita discriminar entre los dos casos. De hecho, en el primer caso, cuando el objeto ha sido meramente desplazado, somos capaces de reestablecer la percepción original realizando una serie de movimientos en orden a colocar al objeto de nuevo en la posición original relativa a nuestro cuerpo. Lo que caracteriza el desplazamiento y lo distingue de las modificaciones cualitativas es, desde el punto de vista psicológico, la posibilidad de corrección y compensación. Aquí, como es notorio, se encuentra la aplicación de la propiedad 4 de nuestra definición de grupo de transformación, a saber, la inversa de un grupo de desplazamientos, donde se deshace la transformación y se retorna a la situación original.[12]

De esta manera, como ya mencionábamos en la introducción, en el siglo XIX se intentó responder al desafío de las geometrías no-euclideanas desde un punto de vista que, aunque permanece dentro de la tradición kantiana, la modifica radicalmente a la luz de ciertos conceptos matemáticos fundamentales. La teoría de grupos proporciona el instrumental conceptual adecuado que permite sostener la validez *a priori* del concepto de espacio conjuntamente con una apelación a la importancia de la experiencia y de la convención en la determinación de las especificaciones axiomáticas particulares. Si podemos determinar el grupo de movimientos que contiene como determinaciones particulares suyas a los diferentes subgrupos que conforman lo que llamamos las diferentes geometrías, entonces habremos determinado un tipo de entidad más vasta al que propiamente podemos llamar "espacio". De acuerdo con los autores mencionados, es a este concepto al que propiamente podemos asignar el estatus de *a priori*, el cual acompaña toda aprehensión intuitiva de las formas individuales dotándolas de verdadera universalidad y de allí de un carácter geométrico genuino.

[12] Superaría en mucho los límites de este trabajo enumerar todas las propiedades del espacio sensible que Poincaré deriva de la idea básica del movimiento de los cuerpos rígidos y sus desplazamientos a través del espacio. Para un tratamiento detallado de este tema remito al capítulo 3 de mi disertación doctoral (inédita).

3. La teoría de los invariantes geométricos y las filosofías de Cassirer y Husserl

Cuando es aplicado a la geometría, un grupo se forma por todas las transformaciones geométricas que resultan cuando permitimos que los elementos se muevan en el espacio tridimensional ordinario.

En este concepto de grupo se obtiene un principio general de clasificación mediante el cual los diferentes tipos de geometrías pueden ser unificados bajo un punto de vista simple. Si planteamos la pregunta acerca de qué debemos considerar como una geometría, la respuesta es: aquellas propiedades que permanecen invariantes a través de ciertas transformaciones espaciales. Es decir, aquellas estructuras que persisten cuando variamos la posición absoluta de esta estructura en el espacio, cuando aumentamos o disminuimos proporcionalmente la magnitud absoluta de sus partes, o cuando finalmente revertimos la ordenación de las partes individuales, como cuando sustituimos la figura original por otra que se relaciona con ella como con su imagen en un espejo.

Felix Klein convirtió a esta idea en el centro del llamado *Erlanger Programm*, que podemos apreciar en el siguiente pasaje: "Dado cualquier grupo de transformaciones en el espacio que incluye el grupo principal como un subgrupo, la teoría invariante de este grupo proporciona un tipo definido de geometría, y toda posible geometría puede ser obtenida en esta forma" (Klein 1939: 133). El sentido de este pasaje puede ser explicado de la siguiente manera: las diferencias entre las geometrías son de hecho las diferencias entre las relaciones que ellas exploran. Las relaciones o propiedades que una geometría explora son aquéllas que son invariantes bajo un conjunto o grupo de transformaciones; las propiedades invariantes y las transformaciones permitidas se determinan mutuamente una a otra, de modo que la geometría puede ser caracterizada por las propiedades invariantes o el grupo de transformaciones.

Los grupos de transformaciones a los cuales se someten las figuras geométricas varían en su grado de radicalidad, y en la medida en que esta radicalidad es mayor, las propiedades invariantes son también más generales. Esto posibilita clasificar las geometrías en relación con este grado de generalidad producido por el grado de radicalidad en las transformaciones, cada una conteniendo a la anterior. En la cima de la clasificación encontramos a la topología, a ésta le sigue la geometría proyectiva, y a ésta la geometría euclideana.

La geometría euclideana es el estudio de las propiedades invariantes bajo el grupo de los así llamados movimientos rígidos, a saber, traslación, rotación y reflexión. La propiedad esencial preservada por este grupo de movimientos es la distancia, es decir, la característica de la isometría. Una transformación *f* es una isometría de A sobre B si preserva las distancias. Para cualesquiera dos puntos P_1, P_2 de A, la distancia desde P_1 a P_2 es igual a la distancia desde $f(P_1)$ a $f(P_2)$. Así, las relaciones que estudia la geometría euclideana son relaciones métricas.

La geometría proyectiva es el estudio de las propiedades de conjuntos de puntos que son invariantes bajo el grupo de transformaciones proyectivas. Estas transformaciones, que posibilitan las así llamadas figuras de perspectiva, constituyen un mapeo uno a uno sobre puntos, es decir, existe una correspondencia uno a uno de elementos correspondientes y una relación de incidencia compartida por dichos elementos. Las características proyectivas más simples son las siguientes: (a) un punto (una línea) es transformada bajo proyección en un punto (una línea); (b) la incidencia de un punto y una línea recta es invariante bajo transformaciones proyectivas, i.e., si A es un punto que está sobre una línea g, después de la proyección el punto A' también estará sobre la línea g'; (c) la colinealidad es invariante bajo transformaciones proyectivas, i.e., si tres o más puntos están sobre una línea, entonces sus imágenes también están sobre sus líneas; (d) la congruencia de las líneas es invariante bajo transformaciones proyectivas; i.e., si tres o más líneas intersectan un plano, entonces sus imágenes también se intersectan.

Por último, la topología es el estudio de las propiedades de un conjunto de puntos invariantes bajo el grupo de transformaciones bicontinuas del espacio sobre sí mismo. Una transformación *f* es bicontinua o se llama un *homeomorfismo* si y sólo si *f* y f^{-1} son ambas continuas. Una transformación de puntos en la región plana S_1 sobre puntos en la región plana S_2 es continua si para todo punto de S_2 y cada número positivo ε hay un número positivo δ tal que la imagen de cualquier punto de S_1 que está en la vecindad de un punto A con radio δ está en la vecindad de la imagen de A con radio ε. La propiedad invariante fundamental que arroja el conjunto de transformaciones topológicas es la de *conectividad* de un conjunto de puntos. Un conjunto está conectado si y sólo si cualesquiera dos puntos del conjunto pueden ser unidos por alguna curva que está completamente en el conjunto. Algunos ejemplos comunes de conjuntos conectados son: dos círculos que se intersectan, un cuadrado, una línea y una pirámide. Ejemplos de conjuntos que no están conectados son: una hipérbola, dos líneas paralelas, y dos círculos que no se intersectan.

Consideremos un ejemplo simple que involucra puntos y líneas en la geometría euclideana. Obsérvese los puntos sobre una línea numérica en la siguiente figura:

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Podemos expresar las transformaciones de los puntos Px sobre esta línea en términos de sus coordenadas ya que existe un isomorfismo entre los puntos y sus coordenadas. Ahora imagínese la siguiente transformación: muévase cada punto 4 unidades a la derecha. Bajo esta variación (técnicamente conocida como traslación) todos los puntos son cambiados. –2 se vuelve 2, –1 se vuelve 3, 0 se vuelve 4, 1 se vuelve 5, 2 se vuelve 6, etc. ¿Qué es lo que todos estos cambios tienen en común? Podríamos escribir una pequeña ecuación para expresarlo: la coordenada x' del punto correspondiente al punto Px se relaciona a la coordenada x mediante la ecuación x'= x+4. Bajo esta transformación no hay puntos invariantes. Si queremos podríamos generalizar desde esta base: cada ecuación de la forma x'= x+a representa una traslación de los puntos Px a los puntos Px'= Px+a. Pero ahora podemos preguntar, ¿hay algo que permanezca invariante bajo esta transformación? La respuesta es sí. La *distancia* permanece invariante, pues x1–x2 = x'1–x'2 dado que vemos que esta última ecuación se sostiene aunque todos los puntos cambien de acuerdo a la fórmula x'= x+a.

Veamos ahora la repercusión de estas ideas matemáticas en las concepciones filosóficas de Cassirer y Husserl.

En opinión de Cassirer, no hay duda alguna de que el método inductivo es el método *par excellence* de la ciencia y cognición empíricas. En los filósofos que presentamos en la sección anterior, la inducción era esencialmente un procedimiento empírico mediante el cual el sujeto constituye ciertas nociones que le serán de utilidad epistémica en su aprehensión del mundo, por ejemplo, la noción de espacio. Asimismo, tanto en Helmholtz como en Poincaré, este procedimiento no puede entenderse a la manera empirista clásica, esto es, bajo la idea de una simple y desnuda recolección de semejanzas entre los fenómenos, sino antes bien, como un proceso que se encuentra regulado en toda su extensión por una función intelectual que asigna a cada momento de este proceso un estatus más que meramente empírico.

En Cassirer, esta idea es llevada a su máxima expresión, dado que en su opinión: "Un análisis más profundo revela aquí también cuán lejos la clasificación de particulares aparentemente receptiva está dominada por presuposiciones ideales" (Cassirer 1923a: 250). Veamos a qué conduce este análisis.

Según Cassirer, el primer hecho que debe reconocerse en todo juicio empírico, algo que los empiristas han pasado por alto, es el elemento de "eternidad" que encierra. Ningún juicio de la ciencia natural se limita a establecer qué impresiones sensoriales se encuentran en la conciencia de un observador individual, en un punto definido del tiempo. Así como el matemático trata las relaciones geométricas o aritméticas puras haciendo caso omiso de las particularidades de sus propias representaciones, así el científico empírico que presenta los resultados de una investigación experimental, siempre va más allá de un simple reporte de sus experiencias perceptuales particulares. Lo que presenta no es la corriente de impresiones sensoriales relacionadas con el acontecimiento en cuestión, sino las propiedades constantes de las cosas y sucesos. Esto no significa un abandono de las particularidades perceptuales relacionadas, sino una verdadera "transformación" de ese contenido, en la medida en que se impone sobre esos datos una nueva forma de realidad. Esta nueva forma de realidad no se erige sobre la base de la mera combinación de representaciones, sino que presupone una actividad independiente y constructiva. Ésta supone en principio una nueva suerte de validez temporal, algo que la experiencia sensorial como tal no puede establecer. Lo que un individuo afirma acerca de un hecho, independientemente de las particularidades con él relacionadas, supone cierta persistencia en el tiempo en la medida en que las condiciones epistémicas permanecen invariables. Si esto no fuera posible, esto es, si no nos fuera posible ascender desde ciertas condiciones ambiguas y cambiantes al establecimiento de un hecho propiamente dicho, es decir, al establecimiento de relaciones permanentes, no podríamos hablar propiamente de conocimiento, sino a lo sumo de una conjunción de propiedades subjetivamente ordenadas.

La meta real de la inducción no es entonces el hecho temporal aislado como tal, sino la subordinación de este hecho al proceso total de la naturaleza. De este modo, el secreto de la inducción se encuentra contenido en el establecimiento del caso individual, pues ya aquí se exhibe la naturaleza misma del proceso, a saber, aquél mediante el cual "trazamos un contenido empírico más allá de sus límites temporales dados y lo retenemos en su carácter determinado para todos los puntos de la serie temporal" (Ibíd.: 247). En efecto, de acuerdo con Cassirer, el establecimiento de un hecho individual enseña ya ciertos rasgos estructurales en virtud de los que se halla constituido, esto es, exhibe las leyes permanentes que constituyen el ámbito global de nuestra experiencia. De este modo, todo juicio individual es un símbolo del proceso total y de sus reglas universales.

De acuerdo con Cassirer, los dos momentos fundamentales de la inducción, los cuales se encuentran conectados mediante una única función del pensamiento, son: la aprehensión de hechos particulares, y la conexión de esos hechos mediante leyes. En ambos casos, el problema es extraer del flujo de la experiencia elementos que pueden ser usados como constantes de construcción teórica.[13] Como ha sido expresado con anterioridad, en todo establecimiento de un hecho a través de un juicio se especifica una conexión necesaria e inmutable. A estas conexiones necesarias e inmutables las llamamos “leyes de la naturaleza”. En estas “leyes de la naturaleza” descubrimos lo que puede ser llamado *constantes de orden superior,* esto es, aquellas relaciones que determinan que un hecho individual tenga determinada estructura. Sin embargo, apunta Cassirer, estas *constantes de orden superior* se resuelven, en cada periodo de tiempo, en variables. Son válidas con relación a cierta esfera de experiencia, y en la medida en que esta esfera se extiende, están sujetas al devenir. De allí que la ciencia presenta en cada periodo la apariencia de haber obtenido la forma completa de la experiencia; pero esto no es más que eso, una apariencia, pues el crecimiento de la investigación empírica, y el estar abierto a ese crecimiento, hace abandonar toda presunción de haber llegado a la completitud de la forma. Sin embargo, este modo de ver las cosas no debe llevarnos a un escepticismo radical que nos conduzca a pensar el desarrollo del conocimiento como la historia de las imágenes del mundo alternativas que se suplantan unas por otras.

Desde su punto de vista, el desarrollo del conocimiento exhibe la misma estructura funcional que exhibe la cognición individual. De acuerdo con su teoría del concepto, la cual se opone radicalmente a la teoría clásica abstraccionista de cuño aristotélico, un concepto es una relación funcional entre particulares.

En opinión de Cassirer, la teoría abstraccionista de la formación de conceptos tiene en su base una idea simple, a saber, la predominancia gradual de las semejanzas de las cosas sobre sus diferencias. Esta predominancia se explica por la idea de que las semejanzas solas, en virtud de sus variadas apariciones, se imprimen sobre la mente, mientras que las diferencias individuales, que cambian de caso a caso, fallan en obtener fijación y permanencia. No obstante, para que esta relación sea posible, la concepción abstraccionista ha postulado la necesidad de una función del pensamiento que relaciona el contenido presente a uno pasado y los reconoce a ambos como idénticos. Sin embargo, Cassirer afirma con razón que esta función de recolección de semejanzas no es suficiente para la conformación de un concepto. Dado que la síntesis que conecta las dos condiciones temporalmente separadas no posee un correlato sensible

[13] Esto tiene sentido si, como Cassirer piensa, la inducción es un proceso en el que lo particular y lo general se encuentran siempre presentes. A continuación se verá este punto en relación a la teoría del concepto.

inmediato en dichos contenidos, se sigue que el mismo material sensorial puede ser aprehendido bajo formas conceptuales muy diferentes. Esto es, aquello que une los elementos de una serie *a, b, c,...* no es en sí mismo un nuevo elemento que está factualmente mezclado con ellos, sino que es una regla de progresión que permanece idéntica a través de los cambios en contenido. Por ello, la psicología de la abstracción necesita postular además que las percepciones puedan ser ordenadas en "series de semejantes", donde se supone una relación intrínseca entre cada miembro de la serie. Sin esa relación, nunca podría concebirse la idea de una conexión genérica y por ende la idea misma de objeto abstracto. Esta transición de miembro a miembro presupone manifiestamente un principio de acuerdo con el cual dicha transición toma lugar, y por el cual se determina la forma de la dependencia entre cada miembro y el siguiente. De esta forma, parece que toda construcción de conceptos supone una forma definida de construcción de series.[14]

De igual manera, ordenar o aprehender un múltiple sensorial significa presentar sus miembros en una concatenación definida de acuerdo con una relación generadora fundamental. A la identidad de esta relación generadora a través de los cambios en contenido la llamamos propiamente un *concepto.*

En este mismo sentido, las diferentes formas funcionales que se especifican dentro de los sistemas teóricos particulares, constituyen, cada una de ellas, eslabones dentro de una cadena serial definida por ciertos elementos estructurales superiores. Todas las formas particulares en que damos contenido al concepto de espacio, por ejemplo, se encuentran dominadas por una noción común, que permanece invariante a través de dicha variedad.

Cassirer llama a estos principios permanentes los "invariantes de la experiencia", e incluye entre ellos las categorías de espacio y tiempo, de magnitud y dependencia funcional de magnitudes.

En este sentido, la teoría de la experiencia, según Cassirer, tendría la tarea de aislar esos principios fundamentales que permanecen a través de los cambios en las determinaciones teóricas particulares. Y en su opinión este procedimiento, el de la filosofía trascendental, "puede ser directamente comparado con el de la geometría. Justo como el geómetra selecciona para investigación esas relaciones de una figura definida que permanecen inmutables bajo ciertas transformaciones, así aquí se hace

[14] Para una explicación detallada de los conceptos de "serie" y "orden" afines al uso que Cassirer hace, véanse los capítulos XXIV y XXV de *The Principles of Mathematics* de Bertrand Russell.

el intento de descubrir esos elementos universales de forma, que persisten a través de todo cambio en el contenido material particular de la experiencia" (Ibíd.: 269).

Tal vez pareciera que Cassirer simplemente obtiene cierta inspiración en la teoría de los invariantes para desarrollar su teoría del concepto y del elemento *a priori* del conocimiento. Sin embargo, su postura es mucho más radical. Desde su punto de vista, la cognición puede caracterizarse desde un punto de vista general como una *actividad de búsqueda y constitución de invariantes*. Y esta función constructivo-idealizatoria se muestra, de acuerdo con Cassirer, no sólo en las matemáticas, sino también en la ciencia empírica y aún en la percepción.[15]

Consideremos ahora el caso de Husserl. Según este autor, a toda ciencia le corresponde un dominio de objetos como campo de sus investigaciones, y a los conocimientos de esos objetos, esto es, a los juicios que se forman sobre ellos les corresponden, como fuente de su validez, ciertas intuiciones en las que esos objetos se dan de manera inmediata. En todas las ciencias empíricas, el modo mediante el cual los objetos se dan es la percepción. Y en la percepción los objetos aparecen individualizados desde el punto de vista espacio-temporal. En este "darse" espacio-temporal se manifiesta, para Husserl, la contingencia del ser individual, es decir, el hecho de que los objetos aparecen en determinadas relaciones y sin embargo podrían hacerlo en otras. Por ejemplo, un objeto que se da en determinado punto del tiempo podría muy bien darse en cualquier otro. Si bien podemos afirmar la validez de ciertas leyes naturales, estas no expresan más que ciertas regularidades fácticas que podrían ser enteramente de otra forma. Sin embargo, afirma Husserl, detrás de esta contingencia de los hechos naturales existe un tipo de *necesidad esencial* que remite a una *universalidad esencial*. Esta necesidad no tiene que ver con las relaciones meramente empíricas en las que los objetos aparecen, sino con el conjunto de propiedades esenciales que definen a cada existente y que permanecen invariantes a través de los diferentes modos de aparecer los objetos. Dice Husserl:

> Un objeto individual no es meramente individual; un "eso que está allí", un objeto que sólo se da una vez, tiene, en cuanto constitui-

[15] El proyecto de su (1910), citado como (1923a) fue mostrar que esta misma función subyace a la producción del conocimiento matemático y empírico. Con posterioridad extendió dicho proyecto a la totalidad de la producción simbólica humana, lo que incluye el arte, la religión, el mito, y la percepción misma. Véase especialmente su (1923b) y su (1944).

> do en "sí mismo" de tal o cual manera, *su índole peculiar,* su dosis de predicables esenciales que necesitan convenirle (en cuanto "es tal como es en sí mismo") para que puedan convenirle otras determinaciones secundarias y relativas (Husserl 1949: 19. El énfasis es de Husserl).

Es decir, que cada individuo posee un sustrato de propiedades esenciales común a muchos otros individuos y en virtud de las cuales pertenece a una determinada "región" o "categoría" de objetos. Por ejemplo, toda cosa material individual tiene su propia forma esencial que consiste en la "cosa material en general", con una determinación temporal, una figura y una materialidad en general.

De acuerdo con Husserl, al igual que los individuos y sus relaciones pueden ser aprehendidos en la intuición empírica, esto es, en la percepción, podemos también, partiendo de esa misma intuición empírica, aprehender los rasgos esenciales que dominan los hechos mediante un tipo de *intuición de esencias* (*Wessenerschauung*). En *Ideas* Husserl es ciertamente críptico a la hora de caracterizar el proceso de intuición eidética o ideación, utilizando principalmente analogías con la intuición empírica. Sin embargo, desde trabajos posteriores podemos hacernos una idea más cabal de lo que tenía en mente.

En *Psicología fenomenológica* y *Experiencia y juicio,* el proceso de ideación es descrito como compuesto de los siguientes momentos: (1) comenzamos con un ejemplo o "modelo"; (2) se recorren activamente una multiplicidad de variaciones del ejemplo; (3) se encuentra que ocurre un traslape como una "unidad sintética" a través de las variaciones; y (4) se identifica activamente esta unidad sintética como un invariante a través de las variaciones. Es en este estadio del proceso en el que hay una conciencia de una esencia, siendo ésta aquello que todas las variaciones tienen en común, es decir, aquello que permanece invariante a través de las variaciones.

Para tomar el ejemplo propuesto al comienzo de esta sección, tenemos la variación específica x'= x+4 bajo la cual no hay puntos invariantes. Es también inmediatamente evidente que no habrá puntos invariantes bajo la variación x' = x+a para cualquier elección de a (diferente de 0). Husserl dice que intuir un universal o esencia aquí, que es una clase de conciencia de más alto nivel, debe relacionarse a una multiplicidad de variaciones. Si hay conciencia de una esencia debe darse una coincidencia entre las variaciones, la cual surge del acto de recorrer dichas variaciones en tanto tales. x1-x2 = x'1-x'2 (la distancia) surge como invariante para nosotros una vez que vemos, en el caso donde x' = x+4 que hay una coincidencia entre las variaciones 4-2 y 8-6, 2-1 y 6-5, etc. Hay algo que esos diferentes pares de expresiones tienen en común aunque seamos conscientes de ellas en diferentes momentos. Contra este trasfondo de variaciones x1-x2 = x'1-x'2 emerge como una unidad sintética. Lo que tenemos aquí, en palabras de Husserl, es una "síntesis de identidad". La identidad es sintética en el sentido en que surge o puede producirse desde actividades mentales que están teniendo lugar en momentos diferentes. Debido a que esas actividades mentales tienen duración temporal y ocurren en diferentes momentos, debe haber alguna función cognitiva sintetizadora que está teniendo lugar a través de ellas. Husserl agrega que debe haber una identificación activa de esta unidad sintética como un invariante a través de las variaciones.

Husserl dice en varios lugares que la intuición de esencias basada en el método que acabamos de exponer no encierra misterio alguno. En efecto, si el lector entiende los ejemplos presentados anteriormente entonces ha tenido dicha clase de experiencia. Si puede captar que la distancia es invariante en nuestro primer ejemplo entonces ha aprehendido una esencia. Los invariantes de los que hemos hablado son esencias en el sentido en que una esencia es un rasgo o propiedad que es la misma a través de una multiplicidad de variaciones. Es algo que una multiplicidad de particulares tiene en común y es en este sentido universal.[16] Si esto es lo que entendemos por "esencia" o "universal", entonces, como vimos en nuestra sección anterior, en la geometría y topología modernas tenemos un dominio de cognición en el cual ya existe un inventario altamente desarrollado de esencias y sus relaciones. Y quizás sea esto lo que llevó a Husserl a decir que la intuición de esencias sea una experiencia rutinaria.

4. El espacio intuitivo en Der Raum de Rudolf Carnap

Como se ha mencionado con anterioridad, en su diagnóstico sobre las causas de los malentendidos que dominaban las discusiones sobre el espacio a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, Carnap distingue tres tipos de espacio: el espacio formal, el espacio intuitivo, y el espacio físico.

Desde el comienzo mismo de sus reflexiones, Carnap reconoce el esfuerzo de los matemáticos por darle a la geometría un estatus puramente deductivo, esto es, sostener la verdad y evidencia de sus teoremas sobre la base de una relación lógica estricta con los axiomas no

[16] En nuestro ejemplo la multiplicidad se refiere a los diferentes pares de expresiones, los cuales guardan entre si una relación idéntica.

apoyada en la intuición.[17] De acuerdo a cómo se dio el desarrollo de la geometría, el antiguo método de proporcionar definiciones explícitas de los términos primitivos que forman parte de un sistema geométrico, fue suplantado por una concepción de la definición que hace énfasis especial en las "relaciones" que esos términos tienen con otros.[18] De acuerdo a esta manera de ver las cosas, a lo que debemos atender en esa relación no es a los términos que la componen sino a la relación misma, que es en última instancia la que provee de significado a los posibles términos que caen bajo ella. Esta pura estructura relacional es lo que permanece a través de los cambios en las interpretaciones intuitivas de sus términos, y por lo tanto, la geometría, como aquella teoría que se erige sobre la base de estas estructuras relacionales puede ser llamada con propiedad una "teoría pura de relaciones" o "teoría de orden", dado que es una ciencia de elementos y relaciones indeterminadas. Los elementos y relaciones definidos por los axiomas son de tan amplia generalidad, que no están restringidos a los tipos de cosas que tradicionalmente entendemos por objetos geométricos, esto es, puntos, líneas o planos. Los axiomas de la geometría tal como Hilbert los expone, pueden ser satisfechos por órdenes de objetos completamente diferentes, por ejemplo, colores, sonidos, etc.

Si esto es así, entonces ¿qué nos hace todavía llamar a esta estructura un *espacio* formal? La respuesta de Carnap es que ésta exhibe el diseño formal de la estructura espacial, y lo que es más importante, "puede, de nuevo, ser transformada en tal insertando formas espaciales en los términos relacionales indeterminados" (Carnap 1922: 3). Lo cual es posibilitado a través del espacio intuitivo.

De acuerdo con Carnap, el espacio intuitivo es "una estructura de orden cuyo tipo formal podemos ciertamente delimitar conceptualmente pero, como todo lo intuible, no su naturaleza particular" (Ibíd.: 14). Es

[17] Tal vez resulte extraño, *prima facie,* que Carnap se congratule con estos rechazos de la intuición que caracterizaron los desarrollos de la geometría, al tiempo que se interese en el espacio intuitivo. Como quedará de manifiesto en lo que sigue, cuando Carnap habla de "espacio intuitivo" no se refiere a los aspectos psicológicos de la percepción espacial, sino a su estructura formal. Esta interpretación de la idea de intuición, que rechaza su relación con cuestiones psicológicas, no era nueva en la literatura. Ya la escuela de Marburgo, principalmente en la figura de Cohen, había procedido en esta dirección, y Frege mismo había hecho lo propio en sus observaciones sobre los fundamentos de la geometría.

[18] A finales del siglo XIX hubo una violenta discusión en torno a este tópico entre los amigos de la definición explícita, Frege y Russell, y los partidarios de la definición implícita, Poincaré y Hilbert. Para un análisis pormenorizado de esta discusión, véase Coffa, J. A., (1986).

decir, Carnap está interesado en delimitar el contenido axiomático de nuestra experiencia intuitiva del espacio, esto es, su fundamento lógico, no psicológico. En su opinión, estos axiomas no pueden justificarse apelando a la experiencia, ni en particular, al *quantum* de experiencia, pues en general no justificamos algo apelando a la repetición factual. Asimismo, dado que "como Husserl ha mostrado, no estamos tratando con hechos en el sentido de la realidad experiencial, sino antes bien con la esencia (Eidos) de ciertos datos" (Ibíd.: 14), el fundamento debe ser buscado en otro lado que en la experiencia.

La intuición empírica se centra en el hecho mismo, esto es, en las particularidades de un estado de cosas. La intuición de esencias, en cambio, se centra en la esencia de un hecho, en lo permanente a través de las variaciones. Para usar el propio ejemplo de Carnap, puedo imaginar o aún aprehender a través de una percepción simple, que varias curvas pasan a través de dos puntos, que en cada una de tales líneas hay todavía más puntos, que un segmento de línea simple, pero no una superficie, puede ser dividido en dos partes por cualquier punto que se encuentra en él, etc. Fíjese que en estos casos, nuestra mirada no se enfoca en estos segmentos de línea aquí y ahora, sino en una relación universal que comparten todos los segmentos de línea. Como veíamos en la sección anterior, al acto de aprehensión de la esencia o el universal, debe antecederle un recorrido a través de una variedad de representaciones particulares. Es interesante, en este contexto, observar que en la nota que acompaña el pasaje que estamos comentando, Carnap refiere a la sección sobre los Axiomas de la intuición de la *Crítica de la razón pura* de Kant. En esta sección, la cual es parte del sistema de los principios del entendimiento puro, esto es, de aquellos juicios que el entendimiento realiza de una manera completamente *a priori*, Kant trata en particular de aquellos juicios que el entendimiento realiza en relación a una experiencia posible en función de las categorías de cantidad. Ese principio es que "todas las intuiciones son magnitudes extensivas" (B202).[19] De acuerdo con Kant, la aprehensión de un fenómeno, el reconocimiento de un objeto en cuanto tal, sólo es posible en la medida en que llevamos a cabo una síntesis de lo diverso, de una variedad. Esa síntesis del múltiple sensorial se lleva a cabo, de acuerdo con Kant, en el espacio y en el tiempo, por lo que todo objeto en cuanto resultado de una síntesis en un tiempo y lugar determinados, es una magnitud. Para usar el propio ejemplo de Kant, una línea es el resultado de una síntesis de pun-

[19] No hay mayor diferencia entre la formulación del principio en la primera y la segunda edición.

tos, esta síntesis se lleva a cabo en cierto lapso de tiempo, es decir, ocupa, o mejor dicho, "genera" un cierto lapso de tiempo, una cierta magnitud temporal.

Ahora bien, de acuerdo con Kant, "las matemáticas de la extensión" (A163-B204), esto es, la geometría, produce sus objetos de acuerdo con esta función sintética, la cual opera regida por axiomas. "Son estos los que expresan las condiciones de la intuición sensible *a priori* bajo las cuales, y sólo bajos las cuales, puede surgir el esquema de un concepto puro de los fenómenos externos" (A163-B204). Es decir, que el axioma dicta la regla bajo la cual se lleva a cabo la síntesis de la variedad, lo cual tiene como resultado el esquema de un objeto, esto es, aquello que encierra las características invariantes y, por ende, esenciales de un objeto. Lo que surge es algo como, en palabras de Kant: "Entre dos puntos no puede haber más que una línea recta" (Ibíd.), lo cual es válido universal y atemporalmente. Así, parece que Kant mismo estaba pensando ya en algo semejante a los invariantes cuando articuló su doctrina del esquematismo trascendental, y Carnap parece estar pensando en esto cuando dice: "En general, el término "intuición" puede también incluir la intuición de esencias, ya que es usado en este sentido amplio desde Kant" (Ibíd.: 15).

Entonces, lo primero que investiga Carnap en relación al espacio intuitivo es su estructura formal, esto es, los axiomas que lo rigen. Con posterioridad tratará la cuestión fundamental de la aplicabilidad de esta estructura al espacio físico, así como sus relaciones con el espacio formal. Permítaseme en primer lugar tratar la cuestión de la estructura axiomática del espacio intuitivo.

De acuerdo con Carnap, lo que debe ser elucidado en primer lugar acerca del espacio intuitivo son sus axiomas. Esto no significa que no podamos obtener por la misma vía las proposiciones que se derivan de esos axiomas, al menos las primeras, pero debemos ser cuidadosos en esto dado que en la medida en que la complejidad de las formas intuidas aumenta, también aumenta el grado de incerteza de las mismas.

Haciéndose eco de observaciones de matemáticos importantes como Pasch y el propio Klein, Carnap afirma que "La intuición siempre se relaciona a una región espacial limitada" (Ibíd.: 15), por lo que sus axiomas serán válidos exclusivamente para formas espaciales de magnitud limitada. Sin embargo, podemos construir, y con "completa libertad" sobre la base de esta cognición limitada, varios sistemas sobre la estructura total del espacio intuitivo. Por ejemplo, podemos construir el concepto de una línea recta infinita partiendo del concepto de segmento de línea y la iteración de una regla de conexión, y también podemos darle contenido intuitivo a dicho concepto en la medida en que partimos de la intuición del segmento y del conocimiento de la regla de conexión, lo cual posibilitaría la aprehensión de cada segmento de la línea en la intuición.

La guía para el descubrimiento de los axiomas de la intuición la proporciona el sistema axiomático construido por Hilbert. Resulta curioso a simple vista que se apele a Hilbert en algo que tenga que ver con la intuición, pues es opinión difundida el que Hilbert fuera reacio hacia algo semejante. Es más, su propia formalización de la geometría euclideana intenta caracterizar todo elemento dentro de este sistema de una manera puramente formal, haciendo abstracción de cualquier contenido intuitivo. Sin embargo, Hilbert comienza precisamente sus *Grundlagen* con el siguiente epígrafe tomado de Kant: "Así, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, pasa de ellas a los conceptos y termina en ideas" (Hilbert 1950: 1), a lo cual sigue en el cuerpo del texto: "La tarea diseñada (la de listar los axiomas de la geometría e investigar sus conexiones mutuas), equivale al análisis lógico de nuestra intuición del espacio" (Ibíd.: 1). Quizás Carnap, al apelar a Hilbert para justificar su empresa, no esté malentendiendo el propósito del eminente matemático. Como recientes investigaciones han mostrado, Hilbert tomaba muy en serio a la intuición, la cual colocaba en la base de una teoría epistemológica acerca de la adquisición de la noción de espacio.[20]

Entonces, Carnap parte de la validez de los axiomas de Hilbert para la geometría euclideana en regiones limitadas de la experiencia. Los grupos de axiomas que acepta como verdaderos de nuestra intuición son: los axiomas de conexión, los de orden y los de congruencia. A ellos agrega otros dos que hacen afirmaciones acerca de la relación de congruencia entre ángulos y segmentos respectivamente. Es destacable que la estructura del espacio intuitivo para dimensiones pequeñas no posee una métrica de suyo propia, pues es una estructura topológica, sin embargo posibilita la postulación de una métrica o de varias. Carnap reconoce que Riemann fue el primero en mostrar cuántos diferentes tipos de espacios intuitivos métricos de 3 dimensiones son consistentes con los axiomas de la geometría euclideana para regiones limitadas de la experiencia.

Carnap propone ciertos postulados mediante los cuales es posible construir, sobre el sistema definido por las tres clases de axiomas mencionados, un sistema ilimitado que llama "espacio intuitivo métri-

[20] Majer (1995) y (2002) tratan de la multitud de malentendidos de la obra de Hilbert. El primero traza las relaciones explícitas entre Kant y Hilbert en lo tocante a la aritmética y la geometría, así como las relaciones de Hilbert con Husserl. El segundo intenta mostrar los errores en la lectura de la obra de Hilbert por parte de los empiristas lógicos.

co de 3 dimensiones", el cual, a su vez puede ser generalizado de modo de obtener un espacio intuitivo métrico de n dimensiones, compatible, claro está, con la estructura euclideana mínima. No obstante, esta generalización también puede operar haciendo abstracción de las relaciones métricas, dando lugar al espacio intuitivo proyectivo de 3 dimensiones, y aún al espacio intuitivo topológico de 3 dimensiones. En este último, se rechazan los conceptos primitivos de línea y plano y en lugar de ellos se usan sólo los conceptos más generales de curva y superficie, de los cuales se investigan las relaciones de "estar en" o "sobre" y sus interconexiones. No obstante, en la misma forma en que el espacio intuitivo métrico de 3 dimensiones puede ser generalizado hasta obtener el de n dimensiones, de la misma manera podemos generalizar el proyectivo y el topológico.

Es importante comprender la argumentación de Carnap claramente. Él tiene en mente no solamente el problema de la estructura lógica de nuestro espacio intuitivo, el cual reconoce como indefectiblemente euclidiano, sino al mismo tiempo está pensando en cómo hacer compatible esta idea con los resultados de la física contemporánea, esto es, de la teoría de la relatividad. Pero aquí es donde entran las consideraciones que tienen que ver con la relación del espacio intuitivo con el espacio físico.

La idea clave del espacio físico es, para Carnap, ordenar los objetos de nuestra experiencia actual de la naturaleza en el espacio intuitivo que ya hemos construido completamente *a priori*. Este espacio físico, no obstante, es mucho más que un mero agregado de experiencias particulares intuitivamente espaciales, es un orden preciso y consistente de objetos espaciales en una estructura matemática simple. A cada objeto debe asignársele una determinación matemática precisa, de modo que las leyes de la naturaleza puedan ser formuladas. Es decir, la clase de estructura matemática requerida por el espacio físico es una estructura métrica completa. Por lo tanto, el espacio intuitivo, con su estructura topológica, no puede proveer de dicha determinación al espacio físico. ¿Cómo hemos de obtener dicha determinación? Para Carnap tal estructura métrica es una convención libremente estipulada.[21] Estas pueden ser de dos tipos: en primer lugar, se estipula directamente que una clase de líneas presentadas por algún objeto o proceso definido cuenta como *líneas rectas*. En segundo lugar, se lleva a cabo una estipulación métrica. Esta consiste en la estipulación de un cuerpo como rígido, la determinación de dos puntos sobre él, y una función que define la distancia entre esos dos puntos

[21] Thomas Mormann (Mormann inédito), ha enfatizado las raíces de la posición convencionalista general de Carnap en esta idea.

en cualquier momento del tiempo. Esta función puede ser más simple, como la que afirma el intervalo entre dos puntos como una distancia constante, o más compleja, como la que introduce condiciones de temperatura, carga eléctrica, etc. En cualquier caso, lo importante es que podamos usar el cuerpo en cuestión para medir distancias entre otros puntos, y para esto sólo necesitan cumplirse determinadas condiciones formales; estamos restringidos a asignar cero a dos puntos que coinciden o más que cero a dos puntos que no lo hacen. Una vez que se hace tal estipulación, la cuestión de si tres puntos se encuentran sobre una línea recta es respondida unívocamente.

De esta manera, la estructura del espacio físico queda doblemente determinada: por un lado, desde el punto de vista del espacio intuitivo, sabemos a través de la intuición de esencias que los objetos que se nos presentan en la experiencia tienen ciertos rasgos *a priori*; por otro, imponemos de una manera convencional la estructura métrica requerida para caracterizar completamente al espacio físico. Para dar un fundamento filosófico a esta distinción Carnap acude a la distinción entre materia y forma de la experiencia, la cual está relacionada pero no es completamente idéntica a la distinción kantiana.

A diferencia de Kant, para quien la distinción tiene sentido en virtud de que de su combinación surge la experiencia, Carnap la usó para analizar la experiencia ya completa en dos partes. Para esto hace "…una división dentro del reino de la forma entre forma necesaria y forma opcional" (Ibíd.: 27). En su opinión, la estructura topológica es la "forma necesaria" a la cual está sujeta la materia, la que a su vez, por supuesto, está también sujeta a varias "formas opcionales" posibles entre las cuales se encuentra el espacio métrico. Así presenta Carnap la idea:

> Permítaseme llamar a la materia que sólo aparece en su forma necesaria "hechos efectivos" de la experiencia. Esta puede estar sujeta a ulteriores formaciones en términos de formas opcionales. En orden a probar si un enunciado experiencial es un enunciado de hechos efectivos o no, y en el último caso, qué en él pertenece a los hechos efectivos y qué a la forma determinada por elección, hemos de investigar si el enunciado experiencial permanece válido para toda posible formación, esto es, para toda clase de transformación espacial (Ibíd.: 27).

La jerga de la teoría de los invariantes es evidente en este pasaje. Como se ha dicho antes, de acuerdo con esta teoría, la topología estudia la clase más general de grupos de transformaciones y por ende captura los invariantes más generales que puedan concebirse. Permítaseme recordar el punto. La geometría euclideana puede ser vista como el estudio de esas propiedades que permanecen invariantes bajo los así llamados "movimientos rígidos": traslaciones, rotaciones y reflexiones. La geometría proyectiva está interesada con la clase de invariantes que son una función de los movimientos rígidos más las proyecciones. La topología está interesada con la aún más pequeña clase de invariantes que obtenemos si nuestras transformaciones son más radicales, incluyendo las de estirar o enrollar. Bajo este punto de vista, la longitud y los ángulos son esencias euclideanas pero no son invariantes bajo las transformaciones proyectivas. La linealidad y la triangularidad son esencias proyectivas pero no son invariantes bajo las variaciones topológicas. La conectividad, en tanto, es una esencia topológica.

En topología no perdemos la propiedad de dimensionalidad de un objeto o figura geométrica, o la propiedad de tener un límite, perdemos cosas como la forma y medida, tal como esos conceptos son entendidos en la geometría euclideana. La equivalencia topológica es mucho más abstracta que la equivalencia euclideana, por ejemplo.

De acuerdo con Carnap, sólo los invariantes topológicos son los que conocemos e imponemos *a priori* a través de la intuición de esencias al espacio físico. Para citar su propio ejemplo, un enunciado de "hechos efectivos" sería: "La superficie de contacto de este cuerpo (mesa) con este cuerpo (piso) consiste en tres partes separadas", pues las relaciones de las que habla permanecen invariantes a través de los cambios de magnitud o de otro tipo que puedan realizarse sobre esos cuerpos. Por otro lado, el enunciado "estos dos puntos en este cuerpo tienen el mismo intervalo que esos otros puntos en este otro cuerpo, el cual no está en contacto con el primero" no es un enunciado de "hechos efectivos", pues depende de una métrica libremente escogida.

Permítaseme terminar resumiendo la cuestión acerca de las relaciones entre los tres tipos de espacio y las características lógico-epistemológicas de cada uno de ellos.

De acuerdo con Carnap, las relaciones entre geometrías y sus objetos, los diferentes tipos de espacio, pueden estudiarse siguiendo los conceptos de especificación y subordinación. En efecto, la relación entre el espacio formal y el intuitivo es la relación entre una estructura con propiedades de orden determinadas pero objetos indeterminados y una estructura con las mismas propiedades de orden pero objetos determinados, esto es, objetos propiamente espaciales. La relación del espacio intuitivo con el espacio físico es la de una forma de intuición a una estructura, constituida ésta por objetos reales. Una vez que conocemos la forma general de la dependencia entre los tres tipos de espacio, detengámonos en el modo en que Carnap concibe la relación entre cognición espacial y experiencia, y en las fuentes de dicha cognición.[22]

El espacio formal, dado que es un dominio especial de la teoría de relaciones y sus proposiciones son derivadas de un modo puramente lógico desde leyes básicas, es analítico y, por supuesto, independiente de la experiencia.[23] Con respecto al espacio intuitivo, dado que sus axiomas se obtienen a través de un tipo de intuición de esencias desde los fenómenos (actuales o imaginarios), sus proposiciones son sintéticas, pero son al mismo tiempo *a priori*, dado que son independientes del agregado actual de experiencias. El espacio físico, en tanto, en la medida en que exige una determinación matemática completa (que incluye una métrica), no puede ser determinado sólo desde la estructura del espacio intuitivo, por lo que requiere la imposición de una "forma opcional" que, como su nombre lo indica, es escogida convencionalmente.

5. Conclusiones

Según Carnap, el espacio continúa siendo la condición de posibilidad de la experiencia externa en el sentido de Kant. De acuerdo con la distinción entre forma necesaria y forma opcional, esas condiciones consisten en aquellas relaciones espaciales que se encuentran pura y exclusivamente en el ámbito de la forma necesaria, en lo que Carnap ha llamado los "hechos efectivos".

Como se ha dicho con anterioridad, esas relaciones se corresponden con las relaciones topológicas, nunca las proyectivas o métricas. Una vez más Carnap ilustra el sentido de estas consideraciones a través de un ejemplo en franca analogía con la teoría de los invariantes. Así lo expresa:

[22] Carnap deja claro en la nota al pie que acompaña el pasaje que estamos comentando, que al hablar de "fuentes" se está refiriendo no al origen empírico o psicológico de nuestra cognición espacial, sino a su fundamento lógico. Por ello cita el famoso *dictum* de Kant de la *Crítica de la razón pura*: "...aunque todo conocimiento empiece con la experiencia, no por eso procede todo él de la experiencia" (B1).

[23] Carnap, al igual que Husserl, desea evitar la terminología kantiana de "*a priori* - a posteriori/ analítico - sintético". En *Ideas* dice Husserl: "Como ya hice en las *Investigaciones lógicas*, evito en lo posible las expresiones "*a priori* y a posteriori", por afán de evitar oscuridades y ambigüedades que las afectan en el uso corriente y que tanto confunden, así como también a causa de las mal afamadas doctrinas filosóficas que como mala herencia del pasado están entretejidas con ellas" (Husserl 1949: 12). Carnap, por su parte, cree que "esos términos no son interpretados y aplicados en la misma forma por todas las partes". No obstante, usa dicha terminología como una concesión a los lectores neo-kantianos del *Kantstudien.*

> La transformación de un enunciado de hechos efectivos desde una forma espacial métrica a otra –e.g., de una euclideana a otra no-euclideana– ha sido correctamente comparada a la traducción de una proposición de un lenguaje a otro. Ahora bien, justo como el sentido genuino de la proposición no es su presentación en una de esas formas lingüísticas –porque esto implicaría que su presentación ulterior en otro lenguaje pareciera derivada o menos original– sino aquello en la proposición que permanece inalterado en la traducción; así también el sentido de un enunciado de hecho efectivo no es su presentación métrica, sino lo que es común a todas ellas (los "invariantes de transformación topológica") –y que es precisamente su presentación en la forma meramente topológica (Carnap 1922: 48).

Quien suministra estas determinaciones y, por ende, constituye la condición de posibilidad de la experiencia, no puede ser ni el espacio formal ni el físico, sino el espacio intuitivo. Pero, como Carnap deja en claro, la estructura impuesta es lo suficientemente amplia como para ser compatible con infinitas determinaciones métricas, las cuales son libremente escogidas y constituyen una ulterior determinación del espacio físico.

Así, el espacio es un "invariante universal" en el sentido de Cassirer. Constituye la "forma de coexistencia en general" que subyace a las determinaciones espaciales particulares que podemos imponer sobre el mundo físico. Esto hace justicia tanto a Kant como al surgimiento de las geometrías no-euclideanas y a su uso en la teoría de la relatividad. Asimismo, esta "forma de coexistencia" posee una estructura topológica que es aprehendida a través de una clase especial de intuición que se enfoca sobre las propiedades que permanecen invariantes a través de un grupo de transformaciones. Es decir, Carnap se hace eco de Cassirer en lo tocante a la caracterización del concepto de espacio como un concepto constitutivo fundamental y absoluto, el cual puede verse como la forma permanente que subyace a todas las determinaciones espaciales particulares, mientras que a la hora de caracterizar el tipo de aprehensión que nos provee de semejante concepto apela a Husserl y a su idea de una "intuición eidética", la cual también descansa, como vimos con anterioridad, en la teoría de los invariantes.

Mirado más de cerca, el problema que hemos tratado aquí tal vez abra una línea de investigación ulterior. La teoría de los invariantes geométricos, cuya notoria influencia sobre concepciones filosóficas sobre el problema del espacio he tratado aquí, tiene en su base, como también espero haber dejado en claro, en el moderno concepto de grupo. Y es digno de mención el que la eficacia de dicho concepto no quedara confinada solamente a la geometría o a la teoría de números, sino que mostrara sus frutos en otras áreas del conocimiento como la física, la química o la biología.[24] Tal vez esto es síntoma de que el concepto de "grupo" es más que una simple herramienta matemática, tal vez podamos verlo como un principio constitutivo fundamental de la conciencia, responsable de la unidad sintética que subyace a todo objeto de conocimiento. Pero esto, esto es tema de otro trabajo.[25]

Bibliografía

Carnap, R. (1992), *Autobiografía intelectual,* Barcelona, Paidós.

—— (1922), "Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftlehre" en *Kantstudien Ergänzungshefte,* 56. Traducción inédita al inglés de Michael Friedman y Peter Heath como *Space: A Contribution to the Theory of Science.*

Cassirer, E. (1944), "The Concept of Group and the Theory of Perception" en *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. V, (1), pp.1-35.

—— (1923a), *Substance and Function and Einstein's Theory of Relativity*, Chicago, Open Court.

—— (1923b), *Filosofía de las formas simbólicas,* México, FCE.

Coffa, J. A. (1986), "From Geometry to Tolerance. Sources of Conventionalism in Nineteenth-Century Geometry" en Colodny, R., (ed.) *From Quarks to Quasars,* Pittsburgh, University of Pittsburgh.

Friedman, M. (1999), *Reconsidering Logical Positivism,* Cambridge, Cambridge University Press.

—— (1995), "Carnap and Weyl on the Foundations of Geometry and Realtivity Theory", en *Erkenntnis,* 42. Reimpreso en Friedman (1999).

Helmholtz, H. v. (1977), *Hermann von Helmholtz: Epistemological Writings*, Cohen R., y Yehuda, E., (eds.), Holanda, Reidel.

Hilbert, D. (1950), *Grundlagen der Geometrie,* versión inglesa, *The Foundations of Geometry,* La Salle, Open Court.

Husserl, E. (1977), *Phenomenological Psychology*, The Hague, Nijhoff.

—— (1973), *Experience and Judgment*, Evanston, Northwestern University Press.

[24] Para una muestra exhaustiva de la eficacia del concepto de grupo en las diferentes manifestaciones cognitivas, véase Mainzer (1996).

[25] Para el esbozo de una concepción de lo *a priori* constitutivo que hace uso del concepto de grupo véase mi (2008).

Husserl, E. (1949), *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica*, México, FCE.

Kant, I. (1988), *Crítica de la razón pura,* Madrid, Alfaguara.

Klein, F. (1939), *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Nueva York, The Macmillan Company.

Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford, Oxford University Press.

Mainzer, K. (1996), *Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Science and Nature*, Berlin, Walter de Gruyter.

Majer, U. (2002), "Hilbert´s Program to Axiomatize Physics (in Analogy to Geometry) and its Impact on Schlick, Carnap, and other Members of the Vienna Circle" en Heidelberger, M., y Stadler, F., (eds.), *History of Philosophy and Science*, Holanda, Kluwer Ac. Publishers, pp. 213-224.

—— (1995), "Geometry, intuition and experience: from Kant to Husserl" en *Erkenntnis,* 42, pp. 261-285.

Meserve, B. (1955), *Fundamental Concepts of Geometry,* Cambridge, Addison-Wesley Publishing Company.

Mormann, T. (inédito), "Sobre los orígenes geométricos del convencionalismo de Carnap".

Peláez, Á. (2008), *Lo a priori constitutivo: historia y prospectiva,* Barcelona, Anthropos-UAM.

—— (2006), "Reconsiderando a Friedman, Richardson, y lo *a priori* constitutivo" en *Ideas y valores,* Nº 131.

—— (Inédito), *De lo sintético a priori a lo a priori formal constitutivo. La geometría y la evolución de lo a priori de Kant a Carnap*. Disertación doctoral defendida en la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM (2006).

Richards, J. L. (1977), "The Evolution of Empiricism: Hermann von Helmholtz and the Foundations of Geometry" en *British Journal for the Philosophy of Science*, 28, pp. 235-253.

Russell, B. (1903), *The Principles of Mathematics*, Londres, George Allen & Unwin.

Smart, J. (1994), *Modern Geometries*, Belmont, Brooks/Cole Pub. Company.

Torretti, R. (1978), *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Holanda, Reidel.

Weyl, H. (1965), *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, México, UNAM.

—— (1922), *Space-Time-Matter*, Londres, Methuen.