RESEÑAS

Gregorio Klimovsky y Guillermo Boido, *Las desventuras del conocimiento matemático*, a-Z editora, 2005, 330 pp.

Las desventuras del conocimiento matemático plantea los problemas que enfrenta la matemática, aún hoy, cuando se la aborda desde un punto de vista filosófico, y muestra cómo se la ha defendido y se la defiende de las "amenazas de la filosofía" que surgen cuando nos preguntamos por qué habría de creerse en las afirmaciones matemáticas, es decir, cuando nos preocupamos por su fundamentación.

El libro presenta a la matemática actual como ocupándose de estructuras posibles (no contradictorias) y sus propiedades, lo que implica poner el acento principal en cuestiones lógicas. Dichas estructuras pueden apreciarse por su belleza y abstracción, como ocurre con otros productos de la creatividad humana, pero también por el servicio que brindan a las demás ciencias, i.e., por sus posibilidades de aplicación. Es en este aspecto en el que la consistencia se vuelve un requisito indispensable de esta disciplina y es por ello el problema principal del que se ocupa la fundamentación de la matemática: es necesario probar que la matemática es confiable y, de ser posible, probar que no lleva a contradicción.

Serias dificultades se han presentado a lo largo del tiempo al tratar de establecer si es posible encontrar una demostración de consistencia absoluta para los sistemas axiomáticos sobre los que se puede edificar la matemática. La cuestión permanece aún irresuelta pues sólo ha podido demostrarse su consistencia relativa. En el libro de Gregorio Klimovsky y Guillermo Boido, encontramos desarrolladas las principales dificultades que plantea esta cuestión y las respuestas que a ellas se dieron hasta la actualidad.

El libro tuvo origen inmediato en las discusiones acerca de la fundamentación de la matemática que se sucedieron en un seminario privado dictado por ambos autores, pero aborda una temática a la cual el profesor Klimovsky dedicó gran cantidad de cursos en diferentes universidades a lo largo de su vida.

Las desventuras presenta un recorrido que va desde los orígenes conocidos de la matemática, en el mundo antiguo, hasta las reflexiones contemporáneas sobre esta ciencia. Son cuatro las preguntas que los autores consideran medulares acerca de dicha reflexión: la primera, una pregunta de carácter ontológico: ¿de qué hablan las proposiciones de la matemática?; la segunda, una pregunta de carácter epistemológico: ¿por qué creer en las proposiciones de la matemática?; la tercera, una pregunta acerca de la metodología: ¿cómo se investiga en matemática? y la última, una pregunta por las aplicaciones de esta ciencia: ¿cuál es la relación entre la matemática y la realidad? Cómo se han respondido estas preguntas hasta nuestros días es el eje articulador de la exposición.

Luego de un primer capítulo en donde se indaga acerca del por qué de este libro, los dos capítulos siguientes están dedicados a relatar las concepciones matemáticas antiguas: desde Ahmés, el empirismo primitivo y Tales de Mileto, hasta los primeros filósofos de la matemática, Platón y Pitágoras, y, en un capítulo enteramente dedicado a él, Aristóteles, cuyo método demostrativo (la axiomática clásica) es una anticipación de los sistemas axiomáticos formales modernos.

En el capítulo 4 se desarrollan los postulados que Euclides explicitó en *Los Elementos*, prestando especial atención al V postulado, el que luego de la reformulación de Hilbert se conoce como postulado de las paralelas, para el cual todavía no ha sido posible demostrar si es o no independiente de los otros cuatro (i.e., si puede ser demostrado a partir de ellos) y, cuya eliminación o modificación, dio origen a las llamadas "geometrías no euclideanas".

La consideración de la secuencia histórica da un salto de dos milenios cuando se examina la reformulación y formalización que de la geometría euclideana realizó Hilbert a fines del siglo XIX. En el capítulo 5 se analizan algunos intentos, todos fallidos, por demostrar la dependencia del V postulado, y se explica cómo surgieron, a partir de la sospecha de su indemostrabilidad, las geometrías no euclideanas de Gauss, J. Bolyai, Lobachevski y Riemann que permiten teoremas "extraños" como, por ejemplo, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menos que dos rectos o que si dos figuras poligonales son semejantes, es decir, tienen ángulos iguales y lados proporcionales, son iguales, lo que implica que no existen figuras semejantes de distintos tamaños.

Hasta el descubrimiento de la relatividad general, se creía que las geometrías no euclideanas eran meras estructuras lógicas sin correlato real y que la única geometría "verdadera" era la de Euclides puesto que, se pensaba, era la geometría del espacio físico. Luego se descubrió que el universo einsteniano no era euclideano y podía representarse con el sistema de Riemann. Para comprender la nueva situación fue fundamental la distinción de Hilbert entre el desarrollo formal de una geometría y su interpretación, distinción que permitió aclarar la diferencia general entre matemática formal y matemática aplicada.

A partir del final del capítulo 5, el resto del libro está dedicado a exponer los sistemas axiomáticos formales y sus propiedades, prestando especial atención a la consistencia.

Una manera de demostrar que un sistema axiomático es consistente, resultado que debemos a Hilbert, es encontrar para él un modelo. En el capítulo 9 se expone un modelo para la geometría no euclideana ideado por Klein. Para construir su modelo este autor utilizó elementos de la geometría euclideana, de modo que proporcionó un modelo relativo: si la geometría de Euclides es consistente, también lo es la no euclideana. La pregunta es, entonces, ¿es consistente la geometría de Euclides? Hasta el momento no se derivaron de ella contradicciones, pero esto no significa que no las haya. Desde la consideración de este caso y hasta el capítulo 14, se desarrolla una serie de traducciones de un sistema axiomático a otro que permite el desplazamiento del problema de la consistencia hacia sistemas cada vez más confiables.

En el capítulo 11 comienza la exposición de lo que se llama "aritmetización de la matemática". Descartes y Fermat, de manera independiente y al mismo tiempo, crearon la geometría analítica: tradujeron la geometría euclídea en términos del lenguaje de los números reales, de manera que todas las propiedades de figuras geométricas quedaron expresadas algebraicamente[1]. La pregunta acerca de la consistencia se desplazó nuevamente: ¿es consistente el álgebra de los números reales? Se demostró que es posible traducir el sistema axiomático que describe a los números reales a aquel que describe a los racionales, desplazando a este nuevo sistema la pregunta por la consistencia. Las reducciones continuaron, hasta que el problema de la consistencia de la geometría euclídea quedó finalmente reducido al de la consistencia de la aritmética de los números naturales: si la aritmética es consistente, también lo es la geometría euclídea y todo sistema que pueda traducirse a ella.

El sistema axiomático para los números naturales creado por Peano admite, además del estándar, infinitos modelos no estándar, de manera que no permite determinar de qué hablamos cuando decimos "número natural" y entonces, puede argüirse, no constituye una adecuada caracterización de la aritmética. Siguiendo a Russell, se creyó encontrar un modelo absoluto para este sistema en la teoría de conjuntos de Cantor. Esto es una forma de lo que se llamó logicismo: si la interpretación conjuntística es modelo para los axiomas de Peano y la teoría cantoriana forma parte de la lógica, es posible reducir la matemática a la lógica. La

[1] Descartes y Farmat demostraron, por ejemplo, que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos de la recta y un conjunto determinado de pares ordenado de números reales. De esta manera, "punto" se traduce como "par ordenado de números reales". La traducción algebraica de "recta" es una ecuación de primer grado con dos incógnitas, cuya forma general es $ax + by + c = 0$.

pregunta por la consistencia se concentra entonces en la teoría de conjuntos. Para responderla, los tres capítulos siguientes se ocupan de las antinomias lógicas y los intentos por solucionar la principal de ellas: la conocida como "antinomia de Russell" en honor a quien fue su descubridor en 1903. En el capítulo 15 se presentan dos de las soluciones: por un lado, la teoría de los tipos de Russell, en su versión simple y en su versión ramificada, junto con un apartado dedicado al tratamiento de sus problemas, entre los que vale destacar la gran dificultad para obtener la matemática habitual dentro de esta teoría, dado que tendríamos tantas aritméticas como órdenes hay dentro de cada tipo, y, por otro lado, la solución del neointuicionismo matemático, posición que, entre otras cosas, se caracteriza por rechazar el principio del tercero excluido. Se analizan también sus dificultades antes de pasar, en el capítulo siguiente y sólo de manera informal, a la solución que proponen las teorías axiomáticas de conjuntos, de las cuales se expone la de Zermelo-Fraenkel.

Los formalistas, de la mano de Hilbert, creían que la matemática podía reconstruirse por completo a partir de los sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos y que podía probarse su consistencia. Esta ilusión fue destruida por los resultados que Gödel probó en 1931 y que se traducen en dos metateoremas a los que se dedica el capítulo 17: en el primero, se demuestra que cualquier sistema que contenga a la aritmética es incompleto; en el segundo, se demuestra que ningún sistema axiomático lo suficientemente fuerte como para expresar la aritmética puede demostrar su propia consistencia, lo que echa por tierra la esperanza de demostrar alguna vez la consistencia de sistemas axiomáticos como el de Peano o el de Zermelo-Fraenkel. El capítulo termina con una breve reseña sobre la situación actual en relación a este tema; el libro, con una reflexión acerca de la relación entre matemática y filosofía.

Las desventuras del conocimiento matemático es un libro muy interesante y tiene la virtud de brindar una introducción profunda a difíciles problemas filosóficos siendo, a la vez, accesible para quien posea conocimientos básicos de lógica y teoría de conjuntos. A esto contribuyen el buen manejo del tiempo narrativo, que permite introducirnos gradualmente en temas de complejidad creciente, los datos biográficos, curiosos la mayoría de las veces, que anticipan el tratamiento de cada autor y enriquecen la lectura haciéndola aún más amena y la claridad y el orden en la exposición que caracterizan a esta obra que nos invita, desde sus primeras páginas, a recorrer el asombroso mundo de la matemática y su filosofía. *(Roberta Zucchello)*