CONSIDERACIONES EN TORNO A LA NATURALEZA CONJUNTISTA DE LA SEMÁNTICA DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS*

SANDRA LAZZER
Universidad de Buenos Aires

Resumen

En este artículo discuto, algunas cuestiones de la semántica de la teoría de conjuntos. La naturaleza teórico-conjuntista de la semántica de la teoría axiomática de conjuntos plantea un problema de circularidad. Es bien sabido que cuando adoptamos la perspectiva de la teoría de modelos para el estudio de las teorías matemáticas decidimos considerar en primer término estructuras en sus relaciones con lenguajes. Pero por la estructura fundamental adoptada en un marco de teoría de conjuntos, a saber, la colección de todos los conjuntos, junto con la relación de membresía, en ese caso tendríamos una estructura cuyo universo sería un conjunto (porque cualquier estructura tiene como su universo a un conjunto) y al mismo tiempo tendría la potencia de la colección de todos los conjuntos. Ése es precisamente el origen del problema fundamental en la semántica de la teoría de conjuntos. Aparentemente, el recurso a una semántica intuitiva o pre-teórica en términos de la concepción iterativa de conjuntos es inevitable. Sin embargo, esta estrategia no parece resolver algunas dificultades filosóficas básicas y está ligada al problema semántico central de la teoría de conjuntos, esto es, cómo comprender la cuantificación sobre la totalidad de los conjuntos. Por último, avanzo algunas consideraciones filosóficas concernientes al problema semántico que examino.

PALABRAS CLAVE: teoría de conjuntos, semántica, concepción iterativa, consideraciones meta-filosóficas.

Abstract

In this paper I discuss some issues concerning the semantics of set theory. The set-theoretical nature of the semantics of axiomatic set theory raises a problem of circularity. It is well-known that when we adopt the model-theoretic point of view in the study of mathematical theories we decide to consider primarily structures in their relationship

* Una versión previa de este trabajo fue presentada en el *Coloquio de Filosofía* SADAF 05. Agradezco los comentarios efectuados por los participantes en dicha oportunidad. La versión definitiva de este trabajo se ha visto enriquecida por los valiosos comentarios realizados por Alejandro Tomasini Bassols. A múltiples señalamientos y observaciones que me hizo le debo el haber corregido y pulido muchas de las ideas aquí expuestas. Deseo, por último, agradecer las valiosas observaciones de los árbitros anónimos de *Análisis Filosófico*.

with languages. But for the fundamental structure adopted in a set-theoretic setting, namely the collection of all sets, together with the relation of membership, we would have in that case a structure whose universe would be a set (because any structure has a set as its universe), and at the same time it would have the power of the collection of all sets. This is precisely the origin of the fundamental problem in the semantics of set theory. Apparently, the recourse to an intuitive or pre-theoretic semantics in terms of the iterative conception of sets is unavoidable. However, this strategy doesn't seem to solve some basic philosophical topics involved and linked to the central semantic problem of set theory, namely, how to understand quantification over the totality of sets. Finally, I put forward some meta-philosophical considerations concerning the semantic problem I deal with.

KEY WORDS: set theory, semantic, iterative conception, meta-philosophical considerations.

§ 1. Semántica y auto-aplicación de nociones conjuntistas

El hecho de que la semántica con la que usualmente se interpretan las teorías axiomáticas y formales de conjuntos sea (ella misma) esencialmente conjuntista genera automáticamente el problema de considerar si esta aplicación es, en algún sentido importante, circular. Según una tradición muy extendida, que se remonta al mismo Aristóteles, la circularidad, en muchas de sus formas, es caracterizada como un obstáculo real para la aclaración conceptual y filosófica. La idea de un "círculo vicioso", por ejemplo, parece encarnar uno de los demonios que tanto filósofos como científicos han debido enfrentar a lo largo de la historia. Hay también muchas clases de circularidad que *per se* no son viciosas, pero que de todos modos conllevan alguna dificultad, aunque no sea más que en nuestras intuiciones, que es preciso resolver. En cierto modo, la actitud teórica frente al fenómeno de la circularidad ha cambiado. Hoy para muchos la circularidad, y quizás especialmente las definiciones circulares, son ubicuas. Los matemáticos, por ejemplo, conviven más pacíficamente que otrora con ciertas definiciones de características evidentemente impredicativas.[1] Una de las razones por las cuales al fenómeno de la circula-

[1] Siguiendo a Kleene podemos caracterizar una *definición impredicativa* de esta manera: "Cuando un conjunto M y un objeto particular m son definidos de manera que, por un lado m es un miembro de M, y por otro, la definición de m depende de M, decimos que el procedimieto (o la definición de m, o la definición de M) es impredicativa". Kleene, S. (1974) pág. 48. Tanto Poincaré como Russell creyeron que la causa de las paradojas residía en tales definiciones. Russell explicó esto mediante *su principio del círculo vicioso*: ninguna totalidad puede contener miembros definibles sólo en términos de esa totalidad, o miembros que envuelvan o presupongan esa totalidad.

ridad se le han atribuido características patológicas son las paradojas. Tanto las paradojas semánticas como las conjuntistas han sido vistas a menudo como *paradojas de circularidad* o basadas en alguna clase de circularidad. Referencia y predicación son las dos relaciones semánticas por excelencia, por lo que *auto-referencia* y *auto-predicación* encarnan nociones circulares de la semántica. La pertenencia a un conjunto es la relación conjuntista básica, lo cual hace que la *auto-pertenencia* sea la relación circular más básica de la teoría de conjuntos. Podemos generalizar esto y tal vez acercarnos a una idea más clara de qué es una noción circular respecto de una disciplina, diciendo que se trata de nociones de tipo *auto-R*, donde *R* es una relación clave en el desarrollo de esa disciplina. Se suele pensar entonces que las paradojas conjuntistas y semánticas ejemplifican paradojas de circularidad, porque son inherentes a relaciones esenciales como las de *auto-pertenencia* y *auto-referencia*. Tenemos entonces una paradoja basada en circularidad cuando una noción circular, que es inevitable e ineliminable, genera absurdos.[2]

Ha existido desde hace muchos años entre algunos filósofos de las matemáticas la sospecha de que hay una cierta clase de circularidad, asociada al tratamiento semántico estándar que involucra la teoría de conjuntos y la lógica de primer orden, que es inevitable. Este problema fue puesto de manifiesto especialmente por George Kreisel durante los años 60 en algunos de sus trabajos. En uno de ellos, un ensayo sobre lógica matemática,[3] tituló la sección (1.8) como: "Semántica y Teoría de conjuntos: *auto-aplicación* en la fundamentación teórico-conjuntista de la lógica" ('Semantics and Set Theory: *self-application* in the set theoretic foundations of logic'). Este título es muy significativo, en vista de que podría haber aquí un fenómeno de circularidad de la clase que hemos consignado antes bajo la forma de una noción circular *auto-R,* donde *R* encarna alguna relación relevante respecto del problema a tratar. "*R*" sería en este caso una relación de "aplicación" o "aplicabilidad". ¿Pero de qué clase? Obviamente se trata de la *aplicación* de nociones conjuntistas en la reconstrucción semántica del lenguaje de la lógica de primer orden y a la vez la *aplicación* del lenguaje de primer orden en la axiomatización y formalización de la teoría de conjuntos. Visto desde el punto de vista

[2] De relacionar el fenómeno de la circularidad con algunas paradojas conjuntistas, y de si este fenómeno está o no presente en la llamada paradoja de Orayen, me ocupo en "Circularidad, lógica y conjuntos", presentado en el *Coloquio Iberoamericano de Filosofía de la Lógica: La paradoja de Orayen*. Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, Ciudad de México, marzo 2005 (en prensa).

[3] Kreisel, G. (1965).

de una teoría de conjuntos axiomática y formal, y consecuentemente de su semántica (formal y modelística) la situación que esta *auto-aplicación* genera puede describirse en los siguiente términos: estamos en presencia de una *formalización* hecha sobre la base de un lenguaje (el lenguaje de primer orden) cuya semántica usualmente presupone los objetos determinados por la misma teoría que se está formalizando.

Las matemáticas, tal como hoy son vistas por un gran número de matemáticos y filósofos pertenecientes a una corriente más o menos unitaria de pensamiento y que ejerció y ejerce aún una enorme influencia sobre la investigación, corriente o *tradición* matemática que puede denominarse *conjuntista,*[4] está fundada en dos ideas básicas. Primero, en la idea de que la teoría de conjuntos provee la ontología básica para las teorías matemáticas, admitiendo que la moderna teoría de conjuntos es ella misma una disciplina matemática.[5] El matemático espera (por lo menos muchos de ellos) de la teoría de conjuntos el fundamento de las matemáticas clásicas. Esta base que es la teoría de conjuntos provee y habilita para los matemáticos un discurso acerca de *objetos matemáticos*, como funciones, relaciones, números, espacios, o campos. Segundo, la lógica clásica se usa en las pruebas de los teoremas matemáticos. En este nivel, se usa un meta-lenguaje para poder hablar de los objetos de una teoría particular, como podría ser por ejemplo la teoría de grupos. Las propiedades de los objetos matemáticos son enunciadas en este meta-lenguaje. Pero hay además otro aspecto importante en el uso de la lógica en matemáticas, un aspecto ligado a la formulación axiomática de las teorías, en especial de la teoría de conjuntos. Mientras que la teoría intuitiva de conjuntos no nos asegura una estructura indubitable para hablar de conjuntos, las presentaciones formales y axiomáticas de la teoría de conjuntos sí lo hacen. La teoría de Zermelo/Frenkel (con axioma de elec-

[4] Uso la denominación de "tradición conjuntista" para designar, siguiendo la propuesta de R. Torretti, a una corriente de la filosofía de las matemáticas, "la que coloca al centro de la matemática, en una forma u otra, la noción de conjunto y trabaja para fortalecerla", en Torreti, R. (1998), prefacio, pág. xi.

[5] En torno a este peculiar doble aspecto o rol adjudicable a la teoría de conjuntos, I. Jané observa: "Por una parte, la teoría de conjuntos es una teoría matemática entre otras teorías matemáticas, con un objeto de estudio propio y métodos propios, con relaciones más o menos profundas con otras teorías matemáticas. Por otra parte, sin embargo, la teoría de conjuntos es una teoría matemática peculiar, en cuanto la mayor parte del resto de la matemática, en particular todas las teorías matemáticas tradicionales, son interpretables en ella [...] Brevemente, interpretar una teoría matemática en la teoría de conjuntos equivale a reformularla como un fragmento de la teoría de conjuntos.", en Jané, I. (2004), págs. 249-250.

ción), esto es *ZFC*, es un ejemplo de ello. *ZFC* es una teoría muy exitosa; mucho del discurso matemático puede ser formulado en ella. Ahora bien, *ZFC* está formalizada en la lógica de primer orden con identidad. Para establecer tanto los aspectos teórico-demostrativos como los semánticos de la lógica de primer orden necesitamos de la teoría de conjuntos. Y esto es así debido a que es una práctica muy extendida, y por cierto exitosa entre los lógicos, *el codificar los objetos lógicos* como objetos matemáticos y esto se hace justamente usando herramientas conjuntistas. La teoría de conjuntos en su forma estándar como lo es *ZFC* sólo nos es disponible en su versión axiomática y formal, usando esencialmente lógica de primer orden. La lógica no puede ser usada sin la teoría de conjuntos y la teoría de conjuntos conlleva esencialmente un uso axiomatizado de la lógica de primer orden. El problema podría describirse de otro modo de la siguiente manera: la lógica y las matemáticas no son teorías establecidas independientemente, sino que cada una se apoya de manera crucial en la otra.

Una posible solución para explicar y neutralizar efectos negativos de la circularidad observada en la *auto-aplicación* de nociones conjuntistas en la semántica usual con que se presentan las teorías axiomáticas y formales de conjuntos podría ser ésta: suponer que al determinar la naturaleza de un universo conjuntista se debe admitir que hay un nivel más básico, asociado con los fundamentos de la teoría misma, que no puede asirse sin una semántica que sea, a este respecto, *intuitiva.* ¿Pero es algo así posible? ¿Qué es una "semántica intuitiva" en este contexto? Y lo que es más importante, si esa semántica pudiera formularse: ¿no sería también circular? Creo que es muy difícil delimitar un concepto como éste, no sólo por las mismas razones que pueden considerarse en el caso de los lenguajes naturales, sino también por razones específicas propias de los lenguajes matemáticos.

§ 2. Modelos y estructuras matemáticas

Para muchos filósofos, el discurso teórico-conjuntista es un discurso acerca de objetos de una naturaleza especial.[6] En concordancia con ello, consideran la verdad en esos discursos en los mismos términos en que lo

[6] Podemos dejar en suspenso consideraciones en torno a cuán "especial" es la naturaleza de estos objetos y si se identifican o no con lo que se suele llamar *objeto abstracto*. "Objeto" aquí simplemente puede ser entendido como aquello que es designado por un término singular, o si se quiere, por lo que Frege consideró un nombre propio.

hacen en los discursos acerca de objetos no-matemáticos.[7] Aunque conceptualmente exista, para algunos, la posibilidad de asumir también en este ámbito una posición débil y desentrecomilladora, para muchos otros, es necesario contar con una semántica teórica filosóficamente robusta o sustantiva. Esto significa sustentar la atribución de verdad o falsedad de las oraciones que contienen expresiones teórico-conjuntistas en una teoría (una ontología) de genuinos *objetos matemáticos.*[8] Una teoría como ésta afirma que la verdad o falsedad de las oraciones que contienen expresiones teórico-conjuntistas está basada en hechos semánticos (acerca de la relación entre lenguaje y mundo) de una cierta clase, modelizados a través de la semántica modelo-teórica usual con la que se interpreta el lenguaje de primer orden. Por ejemplo, se afirma que '$\{\,\} \varepsilon \{\{\,\}\}$' es verdadera en virtud del hecho conjuntista de que el conjunto vacío es miembro de un conjunto unitario cuyo único elemento es el conjunto vacío, y del hecho semántico que designa a '$\{\,\}$' como el conjunto vacío, a '$\{\{\,\}\}$' como el conjunto unitario cuyo único elemento es el conjunto vacío y de la relación de pertenencia 'ε', tal que el primer elemento es un miembro del segundo componente.

Además, como también es sabido, las teorías matemáticas (incluida como tal la teoría de conjuntos) pueden ser estudiadas desde la perspectiva de la teoría de modelos. Así contempladas, las matemáticas básicamente consisten en *estructuras.* Ahora bien, éstas pueden ser "reducidas" a objetos descriptos por la teoría de conjuntos, en el sentido en que pueden ser *expresadas* en el lenguaje de esta teoría. Esta decisión implica entonces una *reducción teórico-conjuntista* de una cierta estructura matemática $\boldsymbol{S}$, intuitiva y básica, a partir de la cual obtenemos un *objeto teórico-conjuntista* "bien-definido", *i.e. un modelo*. Pero esta reducción teórico-conjuntista usualmente se expresa a través de una axiomatización de la estructura $\boldsymbol{S}$, y esta axiomatización debe ser *adecuada*. La adecuación de una cierta axiomatización de la estructura $\boldsymbol{S}$, que expresa la reducción teórico-conjuntista de la estructura misma, tradicionalmente se establece a partir de las siguientes condiciones[9]

[7] Las consecuencias que tiene el aceptar o rechazar que el lenguaje de la matemática se refiera a cierto tipo especial de objetos, objetos abstractos, se puede plantear bajo la forma del llamado *dilema de Benacerraf* : o bien postulamos que el lenguaje matemático se refiere a tales objetos y tenemos grandes problemas para explicar la naturaleza del conocimiento matemático, o bien negamos dicha postulación a costa de comprometer la posibilidad de dar una explicación semítica estándar de la noción de verdad matemática. Véase Benacerraf, P. (1973).

[8] Una visión de este tipo se suele asociar a lo que se ha dado en llamar *realismo matemático* y a veces también *platonismo matemático*. El alcance y la adecuación de estas denominaciones es motivo de discusión en la literatura sobre el tema.

[9] Kreisel, G. & Krivine, J-L. (1967), pág. 160.

(1) Hay una *realización*[10] que satisface los axiomas,
(2) Todas las estructuras que satisface los axiomas son *isomórficas,*[11]
(3) Todas las *propiedades intuitivas* de ***S*** son expresables en el lenguaje de ***S***.
(4) Todas las *afirmaciones* hechas en el lenguaje ***S*** que son *verdaderas* respecto de ***S*** son *consecuencias lógicas* (en un sentido intuitivo) de los axiomas.

Estas condiciones (de cuyo cumplimiento y alcance no nos ocuparemos en este trabajo) fueron propuestas para la axiomatización de estructuras matemáticas clásicas, como por ejemplo los números naturales, reales, etc. Ahora bien, se ha mostrado que cuando de lo que se trata es de la axiomatización misma de la teoría de conjuntos (en cualquiera de sus variantes), no es difícil dotar de sentido a condiciones como éstas y dar con la estructura fundamental adecuada para la teoría de conjuntos, haciendo que a la vez ésta pueda representar la propiedad intuitiva de ser la *colección de todos los conjuntos*, con la relación de pertenencia.

Como Kreisel observa, tenemos en este caso una estructura cuyo *universo debe ser un conjunto* (porque toda estructura tiene a un conjunto como universo), y al mismo tiempo debe tener la capacidad de ser la *colección de todos los conjuntos*. Éste es para muchos precisamente el origen del problema fundamental en la semántica de la teoría de conjuntos. Aparentemente necesitamos de una noción *generalizada de realización*, cuyas variables no tengan alcance sobre un (mero) conjunto, sino que tengan alcance sobre la *colección de todos los conjuntos*, y que a la vez la interpretación adecuada para el signo de relación no sea necesariamente un conjunto. Las *clases propias* han sido la respuesta matemática más apropiada para este problema. Sin embargo, y dejando de lado los tecnicismos, lo interesante es destacar (sumándonos a quienes han puesto ya esto de manifiesto) la *inadecuación filosófica*[12] de esta manera de resolver el problema generado por la noción de un universo conjuntista. Las clases propias permanecen fantasmagóricamente como objetos conjuntistas, aunque su naturaleza conjuntista sea establecida en cada caso de manera arbitraria.[13]

[10] "Realización" aquí puede entenderse como un sinónimo de "modelo".

[11] La satisfacción de esta condición está asociada a la propiedad de *categoricidad* de una teoría.

[12] El concepto de *adecuación filosófica* está usado en el sentido que se puede encontrar en Alchourrón, C. (2003).

[13] Seguiremos en este punto las consideraciones presentes en Lear, J. (1974).

Aquí se nos plantea la siguiente cuestión: ¿es posible distinguir claramente (*i.e.*, de modo que la distinción se sustente en algo más que una mera definición estipulativa) entre una estructura "clásica", como aquellas con las que usualmente se modelizan las teorías matemáticas, y otra estructura "fundamental", por así llamarla, apta para la teoría de conjuntos? Tan pronto como la teoría de conjuntos se convirtió en un tema legítimo de estudio para las matemáticas (lo que sucedió con Cantor a fines del siglo XIX), esta teoría empezó a ser considerada tan "matemática" como el resto de las teorías de la disciplina, aunque a la vez se haya reservado para ella un rol más básico y general.[14] Además, no podemos dejar de notar que las condiciones (1)-(4) pueden ser satisfechas sólo para casos muy elementales, lo que compromete aún más el proyecto de una determinación unívoca de tales estructuras básicas.

En conexión con esto podemos agregar la siguiente observación. Al formalizar un cierto cuerpo de conocimiento matemático podemos proceder de dos maneras. En un primer caso, podemos estar en posición de *privilegiar cierto dominio de interpretación* y de esa manera tratar de "captar" lo más posible de ese dominio a través de los axiomas propuestos para la teoría (buscando así cumplir con la condición (3)). Pero otra alternativa es posible. Para este otro caso no tendríamos una interpretación "natural" o "pretendida" *in mente* sino que, cuando los axiomas de la teoría quedan establecidos, nos interesa más la *clase de todas las interpretaciones* que satisfacen los axiomas (que por la condición (2) deberán generar estructuras isomórficas). Desde un punto de vista formal, sin embargo, las dos situaciones son indistinguibles.[15] Podríamos preguntarnos ahora cuál es el caso de la teoría de conjuntos. En cierto sentido, se podría ubicar a la teoría de conjuntos como ubicándose a la mitad del camino entre estas dos situaciones, dado que dependiendo de sus aplicaciones podríamos visualizar la necesidad o no de considerar ciertos modelos como privilegiados. Dicho de otro modo, pensar en esta teoría como una teoría matemática más, o adjudicarle un rol fundamentador de las matemáticas, puede introducir una diferencia respecto a qué modelos consideramos pretendidos.

Otra cuestión a considerar está relacionada con la justificación de los axiomas para conjuntos. El problema puede resumirse como sigue: generalmente ciertos axiomas están justificados desde un punto de vista teórico-conjuntista si disponemos de un concepto riguroso que satisfaga dichos

[14] *Cf.* nota 4.

[15] La aritmética (elemental) se puede considerar un ejemplo de la primera situación y la teoría de grupos como uno de la segunda.

axiomas. Recuérdese que el disponer de un concepto "riguroso" de conjuntos fue, en parte, lo que motivó la necesidad de axiomatizar y formalizar la teoría de conjuntos. Cantor no había podido formular una definición satisfactoria de lo que es un conjunto. Con la axiomatización de Zermelo ya no se necesitó "definir" los conjuntos, dado que conjunto pasó a ser cualquier cosa que satisficiera los axiomas. Sin embargo, tal como lo describe Mosterín en su libro *Teoría axiomática de conjuntos,*[16] desde el punto de vista del rigor axiomático el sistema de Zermelo adolecía aún de una falencia: "la formulación del esquema axiomático de formación de conjuntos". Este esquema se suele formular diciendo que para cada conjunto a y cada condición $\gamma(x)$, existe el conjunto de todos los elementos de a que satisfacen $\gamma(x)$. Zermelo no habla de una "condición", sino de una "propiedad bien determinada", sin dar una explicación satisfactoria de qué entiende por eso. El problema fue resuelto (quizás sea mejor decir "disuelto") por Skolem, al sustituir "propiedad bien determinada" por "fórmula" (del lenguaje formal de la teoría). Aceptar esto implica obviamente la exigencia de formalizar la teoría en el seno de un lenguaje formal determinado, y que en el caso de la teoría de conjuntos ese lenguaje sea el de la lógica de primer orden con identidad, al que se le adosa la relación de pertenencia como única constante no-lógica. Esto muestra una vez más la interdependencia de ambas teorías. En cuanto a la adecuación de una cierta axiomatización de la estructura ***S***, que expresa la reducción teórico-conjuntista de la estructura misma para el caso particular de la teoría de conjuntos, los axiomas estarán justificados si la condición (1) es verdadera. Pero la dificultad cuando se trata de la teoría de conjuntos es evidente: necesitamos aplicar la condición (1) a la jerarquía de conjuntos misma.

En ambos casos, el hallazgo de una "semántica intuitiva" se presenta de nuevo como un posible recurso que explique y solucione estas cuestiones. Una posible vía para la determinación de una semántica de este tipo la encontramos en varias de las justificaciones que se han propuesto para los axiomas clásicos de la teoría, basadas en el análisis de una *concepción iterativa del universo conjuntista.*

§3. La concepción iterativa del universo conjuntista

En lo dicho hasta aquí, respecto a las relaciones entre una semántica conjuntista y la teoría de conjuntos, hay por lo menos dos razones que llevan a la búsqueda de alguna justificación intuitiva, o si se quie-

[16] Mosterín, J. (1971).

re extra-sistemática y/o pre-teórica (respecto de la construcción de un modelo semántico), que explique satisfactoriamente qué es un "universo conjuntista":

Por un lado, la circularidad en la *aplicación* de nociones conjuntistas en la reconstrucción semántica del lenguaje de la lógica de primer orden y a la vez la *aplicación* del lenguaje de primer orden en la axiomatización y formalización de la teoría de conjuntos.

Por otro lado, las cuestiones ligadas al tratamiento modelístico de la teoría de conjuntos que, 1) parecen necesitar de una noción generalizada de realización o modelo y 2) conlleva la aplicación de la condición de existencia de una estructura que satisface los axiomas a la jerarquía misma.[17]

Una respuesta inmediata a estos requerimientos la podemos asociar a la llamada *concepción iterativa del universo conjuntista.* Esta concepción ha sido objeto de importantes debates, tanto técnicos como filosóficos, y no es mi intención en este trabajo discutir los argumentos involucrados en estas disputas.[18] Señalaré sólo algunos pocos aspectos que pueden justificar las dudas acerca de la capacidad que esta concepción tiene para ofrecer una respuesta filosófica adecuada al problema de contar con una semántica intuitiva para la teoría de conjuntos.

El núcleo de la concepción iterativa puede presentarse del siguiente modo:

1) los conjuntos se obtienen en estratos (niveles) sucesivos
2) los conjuntos se obtienen por la aplicación iterada de ciertos principio de formación[19]
3) no existe un estrato final
4) (de 3) el universo no puede ser completado.

[17] Un tercer aspecto o problema que no hemos considerado está relacionado con el hecho de que no hay una definición de verdad para el universo conjuntista que pueda formularse a partir de los procedimientos estándares en teoría de modelos.

[18] Para muchos autores, el origen de esta concepción (aunque esto también es objeto de controversia) se lo puede encontrar en ciertas nociones implícitas, contenidas en un artículo de Ernst Zermelo, "*Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*" ("Sobre números-límite y dominios de conjuntos") de 1930. En este artículo, Zermelo formula un sistema axiomático que se inspira en el suyo de 1908, pero que difiere significativamente de él. Las peculiaridades de este sistema son expuestas por Torretti, en Torretti, R (1998) # 1.8.5. La formulación explícita de los fundamentos de la concepción iterativa se encuentran en Gödel, K. (1947).

[19] La formulación de los principios que dan lugar a la formación de conjuntos en sucesivos estratos, generando así una jerarquía que es acumulativa e intrínsecamente inacabada, pueden resumirse de la siguiente manera:

Hay además dos supuestos sobre los que la determinación del universo conjuntista se sustenta. Por un lado, el concepto de conjunto que se le adjudica a la teoría actual de conjuntos (la teoría matemática), es el concepto cantoriano de conjunto[20] y éste se entiende como una *colección de objetos de un dominio*. Esto impone una aclaración sobre qué tipo de entidad es un dominio, o por lo menos, cómo se obtienen los dominios. Por otro lado, el universo conjuntista será visto como una *jerarquía acumulativa de dominios* cada vez más incluyentes y de todos los conjuntos incluidos en cada uno de estos dominios.[21] Aunque a primera vista no hay una conexión directa entre los axio-

---

i) Suponemos que a cada dominio D le corresponde un nuevo dominio $P(D)$, el dominio potencia de D. Obtenemos los dominios iterando la operación D ?$P(D)$ a partir de un dominio básico, éste es el dominio vacío.

ii) Continuamos la iteración más allá de lo finito, disponiendo de *ordinales transfinitos*, haciendo que los conjuntos se distribuyan en estratos sucesivos indicados por estos ordinales. LA idea es más o menos la siguiente. Si queremos continuar la iteración más allá de lo finito, debemos entonces contar con ciertos índices que extiendan la sucesión de los números naturales. Estos índices son los ordinales transfinitos qeu Cantor introdujo a fines del siglo XIX. La manera en que estos ordinales se definen es mediante un proceso de generación y a partir del número cero, el menor de todos los ordinales, con la ayuda de dos principios: a) dado un ordinal α, el primer principio permite generar su sucesor inmediato, esto es $\alpha + 1$, b) el segundo principio se aplica a cualquier sucesión de ordinales *sin elemento máximo*, de tal manera que se genera un límite, esto es, *el menor ordinal mayor que todos los términos de la sucesión.* Con la ayuda de los ordinales podemos ahora dar una descripción esquemática del universo conjuntista, siendo que los conjuntos se distribuyen en estratos sucesivos, indicados por los ordinales. El estrato o universo parcial correspondiente al ordinal α es el dominio V_α que se obtiene a partir de sus predecesores, siguiendo el orden de generación marcado por los ordinales.

iii) Sobre esta base establecemos dos casos, que siguen los principios de formación de los ordinales: si α es un ordinal distinto de 0, definimos V_α , según como α haya sido generado, del siguiente modo a) si α , por el primer principio, es sucesor inmediato de un cierto ordinal β *(*$\alpha = \beta + 1$*),* V_α *es el dominio potencia de* V_β ; 2) si β, por el segundo principio, es el límite de una sucesión de ordinales sin elemento máximo, en el estrato V_α no aparece nada nuevo, simplemente se acumulan todos los conjuntos ya presentes en estratos anteriores.

La definición recursiva de esta función ordinal se debe a von Neumann.

[20] Para una presentación de cuál es la *noción matemática de conjunto* y su origen en la obra de Cantor, véase, Torretti, R. (1998) # 1.1 y 1.2. Un aspecto común entre aquellos que hablan de una *noción matemática de conjunto* es el de rechazar una noción (lógica) asociada definicionalmente de conjunto como es la de *extensión de un concepto*.

[21] Para una exposición detallada de estas nociones puede verse Jané, I (2004). Allí Jané aclara la *noción de dominio* diciendo que "[...] cuando digamos que ciertos objetos forman un dominio, significaremos con ello que está determinado cuáles son exactamente estos objetos; no sólo si un objeto cualquiera es uno de los objetos en cuestión, sino *cuáles son exactamente todos los objetos en cuestión*.", pág. 254 (el énfasis es mío).

mas de la teoría de conjuntos, por ejemplo de *ZF,* con la concepción iterativa, para los defensores de esta concepción, gracias al análisis de los recursos que estos axiomas introducen en cuanto a definiciones y demostraciones que con ellos pueden formularse, se puede observar que "los axiomas implican que los conjuntos se distribuyen según la jerarquía acumulativa".[22]

Lo que es relevante respecto de la posibilidad de encontrar alguna noción intuitiva que explique cuál es el *contenido* de los axiomas viene dado por la suposición de que los axiomas pueden justificarse a partir de la concepción iterativa. Si esta justificación puede llevarse a cabo, la teoría *ZF* será "una expresión en el lenguaje matemático de la concepción iterativa".[23] Los más importantes intentos por justificar los axiomas de *ZF* sobre la base de la concepción iterativa se pueden encontrar en trabajos de Joseph R. Shoenfield,[24] George S. Boolos[25] y Hao Wang.[26]

En términos generales, en estas propuestas se intenta justificar los axiomas sobre la base de que éstos generan *colecciones completas*, las cuales se asocian a conjuntos, a partir de lo cual hay que explicar en qué sentido estas colecciones son completas. Se describe la jerarquía acumulativa, generada en la base de una función ordinal definida por una recursión transfinita, como el *universo de conjuntos "natural" de la teoría ZF*, y se sostiene que los axiomas de *ZF* son verdaderos respecto de dicha jerarquía. El punto clave en estas justificaciones es que en todo estrato o nivel *S* de la jerarquía, *toda colección de conjuntos que se forman en ese estrato a partir del estrato precedente, se constituye como un conjunto*. Pero para establecer qué estratos existen, el supuesto crucial es que ese estrato realmente existe sólo bajo la condición de que podamos *visualizar* una situación donde *todos los estratos* de una cierta colección pueden *completarse.* Lo que esto pone de manifiesto es que las nociones de "formación" y "completabilidad" no pueden ser consideradas constructivamente.[27] Esto no sería sorprenden-

[22] Jané, I. (2004), pág. 258. Jané explica esto diciendo que "a partir de estos axiomas [los de *ZF*] es posible definir el concepto de ordinal [sobre el que la jerarquía se estructura] y demostrar que los ordinales definidos se comportan como ordinales cantorianos, [con los que] es posible definir la sucesión de estratos y demostrar que todo conjunto pertenece a algún estrato."

[23] Jané, I. (2004), pág. 258.

[24] Shoenfield, J. (1977).

[25] Boolos, G. (1971).

[26] Wang, H. (1974).

[27] En el trabajo de Jané antes mencionado, encontramos algunos elementos que certifican esta impresión: "la concepción iterativa que hemos descrito [no] caracteriza propiamente a la jerarquía acumulativa, ya que no es más que un esquema, un andamiaje que sólo adquirirá cuerpo en la medida en que demos contenido a los paráme-

te si de lo que nos ocupáramos fuera de la teoría misma y no de su fundamentación filosófica. Un aspecto característico de las matemáticas conjuntistas es el uso generalizado de métodos de inferencia no constructivos. También se admiten de manera incondicional ciertas demostraciones de existencia pura. Pero si a nivel de la fundamentación la jerarquía misma no genera constructivamente la explicación resultante de cómo es posible que todos los estratos pueden completarse, deberá agregársele otro elemento. ¿Cuál? ¿Alguna versión del realismo, por ejemplo?

Sólo para ilustrar el punto, tomemos uno de los axiomas de la teoría: consideremos *el axioma de sustitución o reemplazo*, de acuerdo con el cual (en términos intuitivos) *si sustituimos los elementos de un conjunto dado por conjuntos cualesquiera, el resultado es también un conjunto*. Pero al considerar al objeto así formado, esto es, un conjunto, suponemos que se ha podido *completar* la operación por medio de la cual formamos la colección, o sea, obtuvimos un $\{F(y): y \, \varepsilon \, x\}$, donde F es una función con alcance sobre los elementos que pueden ocupar el lugar de "y", tal que $y \, \varepsilon \, x$. Pero aquí se nos presenta la siguiente cuestión: *F,* en principio, puede contener *parámetros arbitrarios* y presuponer una *cuantificación ilimitada*; pero si éste es el caso, entonces, se estaría haciendo referencia a estratos o conjuntos aún no formados. Pero entonces ¿no excluye esto todo posible intento de adjudicarle un sentido constructivo a la noción de completabilidad aquí presupuesta para la justificación del axioma? Además, en la formación de la jerarquía acumulativa, los estratos son acumulativos, es decir, si un conjunto aparece en un estrato, aparece también en todos los estratos ulteriores, si bien hay siempre un primer estrato en el que el conjunto aparece (los elementos aparecen en estratos anteriores al primero en el que el conjunto aparece). Pero a esto habría que agregar (para no trivializar la operación de formación) que en la formación de un conjunto cualquiera *no* disponemos "previamente" del objeto que con ese conjunto se constituye.[28] Pero entonces ¿no debemos presuponer, para justificar que podemos generar en nuestra jerarquía el objeto que se forma por aplicación del axioma de reemplazo, de alguna manera, que ese objeto ya existe? Y si, por otro lado, no quisiéramos admitir semejante presuposición ¿no se sustentará la fundamentación que se pueda ofre-

tros de que depende", pág. 259. Estos parámetros son el paso de un dominio a su dominio potencia y el alcance de la ilimitación de la generación de ordinales. En un apartado posterior de este mismo trabajo, Jané agrega que "Las ideas y los conceptos con los que forjamos la concepción iterativa y que subyacen a la teoría axiomática *no son formulables con precisión*", pág. 262 (el énfasis es mío).

[28] Salvo que "dispongamos" tenga un sentido potencial: podremos disponer de este objeto dado que disponemos de los elementos que lo forman.

cer del axioma más que en el *hecho efectivo* de que cualquier conjunto de operaciones arbitrario *puede* llegar a ser completado, lo que en un sentido sería no más que una reformulación del axioma mismo?

Estas consideraciones, muy generales, sólo pretenden mostrar que la noción de "completabilidad" no es una noción elemental, que pueda ser tomada en un sentido ingenuo, sino que por el contrario necesita de un tratamiento y de un esclarecimiento conceptual.[29] Pero más allá de ello, lo que se ha puesto de manifiesto es que en el núcleo mismo del problema semántico de la teoría de conjuntos está la pregunta de qué sentido le damos a la noción de *cuantificación sobre todos los conjuntos.* En relación con esta pregunta, la fundamentación de los axiomas ofrecida a partir de la concepción iterativa es colateral, o quizás un aspecto del problema mismo.

§4. La cuantificación sobre el universo conjuntista

En este punto, hemos llegado a lo que a mi entender es el *núcleo del problema semántico de la teoría de conjuntos*: la cuestión de cómo entender la *cuantificación sobre todos los conjuntos.* Hay dos rasgos aparentemente incompatibles en la descripción de una jerarquía acumulativa como la reseñada antes. Por un lado, existe la pretensión de que ciertos *cuantificadores ilimitados* con alcance sobre los ordinales tengan su alcance sólo sobre los ordinales menores que un cierto ordinal α.[30] Sin esta suposición, como observara Kreisel,[31] el significado de las expresiones cuantificacionales *sólo podría estar bien definido* bajo el supuesto de que *hay* una colección constituida por *todas las colecciones*, lo que es falso para las estructuras pretendidas. Por otro lado, la intención que subyace a una *cuantificación ilimitada* presupone claramente un universo de conjuntos *total*, sea lo que sea lo que eso resulte ser. Estas dos proposiciones no son en principio contradictorias. Además, su interacción parece dar fuerza al desarrollo semántico mismo de la teoría de conjuntos, aun cuando siga haciendo falta una clarificación filosófica.

Además, parecería que cuando usamos la lógica clásica con oraciones que conllevan una cuantificación sobre un universo conjuntista presuponemos que está perfectamente definido qué conjuntos hay. Esto puede

[29] Hay en el trabajo de Boolos antes señalado un esclarecimiento conceptual y un tratamiento formal de la noción de completabilidad.

[30] Es decir, en general, se pretende que los cuantificadores ilimitados tengan alcance sólo sobre *los conjuntos* de un tipo menor que α.

[31] Kreisel, G. (1965).

usarse como una especie de *reductio* para el uso de la lógica clásica en este contexto: si admitimos que la multiplicidad de todos los conjuntos es *irreduciblemente potencial*, entonces no podremos aplicar en ella la cuantificación existencial clásica. Dos alternativas se abren: o es simplemente erróneo aplicar lógica clásica (de primer orden) en este caso,[32] o la teoría de conjuntos clásica es insuficiente para cubrir todas las posibles formas de agrupar diversidades en unidades. El primer caso podría expresarse de esta manera: al formular nuestro concepto de dominio, éste no debe fundarse en la intuición lógica de una cuantificación ilimitada sobre todos los objetos, sino más vale (en un sentido que habría que desarrollar teóricamente) en algún objeto o *constructo matemático*, no asimilable a objeto lógico alguno. En el segundo caso, la teoría clásica de conjuntos no podría distinguir el universo de un "gran" conjunto que estuviera constituido por todas y sólo aquellas formas de agrupar que se presuponen en la teoría misma.

Ahora bien, exactamente éste es el problema semántico central: la semántica parece requerir de un universo que tenga la propiedad de ser un conjunto, pero tan pronto como tratamos de determinar el dominio de cuantificación, éste se nos escapa de las manos, revelándose como meramente un conjunto y no como "el" *conjunto universal* o el universo que necesitamos. Parecería que tenemos que enfrentarnos a una cierta ambigüedad respecto de qué interpretación es deseable para la teoría de conjuntos. Por un lado, la teoría parece ser acerca de un cierto "universo" que estamos tentados en concebir como análogo a un conjunto y además esperamos que la formulación de la teoría pueda dar sentido a que este universo *es* un conjunto.[33] Pero, por otro lado, tomarlo en este sentido traiciona nuestro deseo, ya que en definitiva involucra un uso del lenguaje teórico-conjuntista que no puede ser interpretado con ese mismo conjunto como universo sin caer en paradojas.

[32] Este camino es el elegido por W. Tait, en Tait, W. (1998) y también por (aunque con otras características) J. Lear, en Lear, J. (1974).

[33] Encontramos esta noción en Parsons, Ch. (1983), pág. 91. Para Parson nuestra comprensión de los cuantificadores en este contexto es esencialmente vaga. Considera entonces que agregar el concepto de clase (propia) a la teoría de conjunto hace que: "[T]his process would be that of gradually imposing on our discourse an interpretation which makes the original universe a set. Even before the introduction of classes, the application of classical logic to statements about all sets could be taken as a first step in this direction" (*Ibíd.,* p. 219). El uso de los cuantificadores viene dado antes que su interpretación y la asignación de un dominio a las variables es una operación esencialmente externa. Es así como: "From this point of view, if I take your quantifiers to range over "all" sets, this may only show (from a "higher" perspective) my lack of a more comprehensive conception of set than yours. But then it seems that a perspective is always possible according to which your classes are really sets" (*Ibíd*., p. 219).

Las posibles reacciones a la presencia de especies de aporía son interesantes. Por ejemplo, se podría tratar de adoptar una visión *modalista* para resolver el problema, distinguiendo entre conjuntos *actuales* y *posibles* (en un sentido primitivo e irreducible). Otra posible reacción consistiría en *negar la necesidad de tener una entidad conjuntista como dominio de cuantificación*. Pero el significado o las implicancias filosóficas de una decisión como ésta, en principio, no son tan claras. Podría tratarse de la expresión de una *creencia realista* en el universo como una totalidad que debe ser completada de alguna manera, sólo que demasiado grande para nuestros pobres poderes mentales; o, en una dirección opuesta, podría tratarse de la negación del problema como realmente filosófico, considerando que la meta-matemática de la teoría de conjuntos nos podrá dar una solución técnica al mismo.

Debemos reconocer que, en los desarrollos matemáticos habituales de la teoría de conjuntos, de forma acrítica se admite el universo de conjuntos como un modelo de la teoría y se trata a este universo como si fuera un conjunto, haciendo que las razones de por qué éste no es un elemento del universo de conjuntos, *i.e.* no es un miembro de sí mismo, se dejen en suspenso. Las *clases propias,* como concepto a cuyo auxilio se apela, no resuelven el problema, porque con ellas se rechaza *qua* conjunto lo que es considerado en *todos los otros respectos* un conjunto. Pero resulta claro a la vez que, si decidimos rechazar el universo de todos los conjuntos como una totalidad bien definida e identificable con nuestra idea de dominio, aunque las paradojas conjuntistas se bloquearan, las consideraciones semánticas sobre la noción de verdad en ese universo necesitarán de una explicación alternativa. Quizás necesitemos entonces de una lógica de orden superior, quizás con ello podamos formular una adecuada distinción entre lo que es un “domino” y lo que es un “conjunto”, quizás esta distinción introduzca un nuevo tipo de objeto matemático (no necesariamente lógico). Muchas alternativas se ciernen y en alguna medida un cierto *pluralismo teórico-conjuntista* parecería ser la actitud adecuada para buscar una solución satisfactoria, aunque probablemente no definitiva, para la confrontación entre supuestos e intuiciones básicas respecto de qué es un conjunto, qué es un universo de conjuntos y qué un dominio.

§5. Observaciones finales

Para terminar quisiera introducir algunas reflexiones generales de un carácter, al que pomposamente podríamos denominar “meta-filosófico”, con miras a posibles soluciones para el problema semántico de la teoría de conjuntos hasta aquí esbozado. Podríamos decir que, con relación a la posibilidad mencionada antes de que es simplemente erróneo aplicar la lógica clásica (de primer orden) para entender lo que hacemos cuando cuantificamos sobre un dominio conjuntista de objetos, y que por lo tanto debemos abandonar esta pretensión, la solución impone un precio a pagar, a mi entender, demasiado alto.

La historia del trabajo matemático en teoría de conjuntos de los últimos cuarenta años confirma esta impresión: quienes teorizan en este ámbito toman la lógica de la manera más inocente posible, lo que no excluye, como ya hemos visto, importantes problemas, aunque éstos pasen por ajenos. La actitud dominante entre quienes resaltan el carácter matemático de la teoría de conjuntos, hace que todos los supuestos o problemas semánticos que sea necesario resolver "se descarguen" o "se trasladen" a cuestiones matemáticas como la de, por ejemplo, los cardinales grandes o la de los cardinales inaccesibles.[34] Las soluciones conceptuales o lógicas son desechadas en un sentido drástico: simplemente se las ignora. ¿Es razonable esta estrategia? Bueno, en principio no tendría por qué no serlo, sobre todo si en lo que se piensa es en resolver problemas de índole matemática. Ahora bien, también es razonable admitir que esta estrategia, por sí misma, no resuelve ningún problema filosófico, ninguno de los muchos que están asociados con la teoría de conjuntos, y en todo caso, a lo sumo, lo que se hace con ellos simplemente es rechazar su pertinencia.

Además, resulta curioso, desde un punto de vista filosófico que, al adoptar una actitud como ésta se tenga la pretensión de estar poniendo a los problemas filosóficos en lo que se considera su *correcta dirección*. Ésta podría presentarse diciendo lo siguiente: dejemos que los matemáticos resuelvan sus propios problemas, sin esperar para éstos soluciones lógicas o conceptuales. Se le otorga a la filosofía un rol bien definido, aunque éste sea meramente propedéutico; a saber, entender la naturaleza de las soluciones matemáticas.[35] Para quienes la filosofía es algo más que esto,

[34] Ejemplificadora de esta actitud son algunas de las afirmaciones que encontramos en el trabajo de Mosterín, J. (2004), págs. 229-46. "En la teoría de conjuntos actual [se] permite visualizar el universo conjuntista como un cono invertido. [...] la existencia de cardinales inaccesibles, [...] dispara la altura del cono a extremos de vértigo" *Ibíd.* 231

[35] Un ejemplo de una actitud como estala encontramos en el artículo de I. Jané antes mencionado— Jané comienza su exposición con esta frase: "Este artículo es una reflexión filosófica sobre la teoría de conjuntos". (*Ibíd.*, p.247) Aunque cuando se aborda la tarea de dar "una interpretación filosófica de la teoría de conjuntos" se nos aclara previamente que "Es importante, púes, distinguir la actitud del matemático de las del filósofo ante la teoría de conjuntos (en general ante cualquier teoría matemática),

esta actitud no es aceptable. Claro está que, cuanto más sea lo que pueda decirse y aportarse desde la filosofía de la matemática, es algo deberá a su vez ser explicado.

Bibliografía

Alchourrón, C. (2003): "Sobre la adecuación filosófica de las teorías de conjuntos", en Hurtado, G. & Moretti, A. (eds) (2003), págs. 61-69.

Benacerraf, P. (1973): "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, *70*, pp. 661-679.

Boolos, G. (1971): "The iterative concept of set", *Journal of Philosophy, 68*, pp. 215-32.

Dale, H. & Oliveri, G. (eds.) (1998): *Truth in mathematics*, Oxford, Oxford University press.

Gödel, K. (1947): "What is Cantor´s Continuum Problem?", *American Mathematical Monthy, 54*, pp. 514-25.

Jané, I. (2004):"¿De qué trata la teoría de conjuntos?" en Moretti, A. & Orayen, R. (eds.) (2004), pp. 249-250.

Kleene, S. (1974): *Introducción a la metamatemática*, Madrid, Editorial Tecnos, (trad. M. Garrido).

Kreisel, G. (1965) : "Mathematical Logic" en Saaty, Th.L. (ed.) *Lectures in Modern Mathematics*, New York, pp. 95-105.

Kreisel, G. & Krivine, J-L. (1967): *Eléments de Logique Mathémathique*, París.

Lear, J. (1974): "Sets and Semantics", *Journal of Philosophy*, 71, pp. 86-102.

Moretti, A. & Orayen, R. (eds.) (2004): *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, volumen 27: Filosofía de la Lógica*, Madrid, Ed. Trotta.

Mosterín, J. (1971): *Teoría axiomática de conjuntos*, Barcelona, Ariel, 1971.

——— (2004): "Lógica y teoría de conjuntos", en Moretti, A. & Orayen, R. (2004), pp. 229-246.

Parsons, Ch. (1983): *Mathematics in Philosophy*, Ithaca.

Shoenfield, J. (1977): "Axioms of set theory", en Barwise, J. (ed.) : *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdan, pp. 321-344.

Tait, W. (1998): "Foundations of set theory", en Dale, H. & Oliveri, G. (1998), pp. 273-290.

Torretti, R. (1998): *El paraíso de Cantor*, Santiago de Chile, Ed. Universitaria, Universidad Andrés Bello.

Wang, H. (1974): *From Mathematics to Philosophy*, London.

---

incluso en el caso de que el matemático y filosofo sean una misma persona. El uso que hacen uno y otro de la teoría es distinto. La teoría de conjuntos es una teoría matemática y *no es tarea del filósofo enmendarla.*" (*Ibíd.*, p.263) (el énfasis es mío)