DOI 10.36446/af.2023.490

PUREZA DEL MÉTODO Y PRÁCTICA MATEMÁTICA: DESAFÍOS Y PERSPECTIVAS*

Purity of Method and Mathematical Practice: Challenges and Prospects

Guillermo Nigro Puente [a, b, c]
https://orcid.org/0009-0008-8075-6129
guillenigropuente@gmail.com

[a] Instituto de Profesores "Artigas", Montevideo, Uruguay.
[b] Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.
[c] Universidade Federal da Bahia, Salvador da Bahia, Brasil.

Resumen

Dentro de la filosofía de la práctica matemática, la cuestión de la *pureza del método* ha ido ganando un lugar en las agendas de investigación y publicaciones. Usualmente se asume que "pura" es un predicado de soluciones o demostraciones, el cual resulta satisfecho cuando estas son *intrínsecas* a los problemas o teoremas. En este artículo motivo la adopción de una concepción más hospitalaria, de acuerdo con la cual la pureza del método emerge con naturalidad en la práctica de construir teorías matemáticas autónomas, y muestro cómo a partir de esta la concepción usual se ve enriquecida.

Palabras clave: Teorías matemáticas; Construcción de teorías; Método axiomático; Desafío semántico; Desafío del valor.

Abstract

Within the philosophy of mathematical practice, the question of *purity of methods* has been gaining a place in research and publication agendas. It is usually assumed that "pure" is a predicate of solutions or proofs, which is satisfied when they are *intrinsic* to the problems or theorems. In this paper I argue for the adoption of a

* La elaboración de este artículo se enmarca dentro del proyecto de investigación "Demostraciones tópicamente puras en la práctica matemática: una indagación en los problemas fundamentales de un reciente programa de investigación", financiado por CSIC (Proyecto Iniciación a la investigación, 2019 - 2021, ID: 259). Quisiera agradecer las opiniones y discusiones mantenidas con Abel Lassalle Casanave, Eduardo Giovannini, José Ferreirós, José Seoane, Cecilia Neve, María De Paz, Guillermo Címbora, Ana Clara Polakof, Alejandro Chmiel, Matías Gariazzo, Fernanda Pallares y Christian Novelli. Finalmente, quisiera agradecer los fecundos comentarios realizados por un árbitro anónimo, los cuales me permitieron mejorar sustantivamente el texto original.

broader conception, according to which purity of method emerges naturally in the practice of constructing autonomous mathematical theories, and I show how the usual conception is enriched from this.

Key words: Mathematical Theories; Theory Formation; Axiomatic Method; Semantic Challenge; Value Challenge.

1. Introducción

Dentro de la filosofía de la práctica matemática, la cuestión de la *pureza del método* ha ido ganando un lugar en las agendas de investigación y publicaciones. Usualmente se caracterizan los métodos puros por relación a las demostraciones o soluciones en los que se emplean; así pues, las soluciones/demostraciones puras son *intrínsecas* a los problemas/teoremas. Por otro lado, un recurso metodológico es "impuro" si resulta ser *ajeno* al problema/teorema. Así mismo, y dado que "intrínseco" y "ajeno" pueden (y suelen) entenderse como una relación tópica (o semántica), la expresión "pureza tópica" suele ser empleada para especificar en qué sentido se entiende la relación "intrínseco a". De esta manera, las soluciones/demostraciones "tópicamente puras" son intrínsecas al *tópico (o contenido)* del problema/teorema en cuestión. Alternativamente podría decirse: las soluciones/demostraciones son puras, si "se basan únicamente" en el tópico del problema/teorema. No obstante, para lograr una mejor economía de exposición, emplearé "pureza" siempre queriendo dar a entender "pureza tópica"; por otra parte, "pureza del método" siempre significará indistintamente "demostración pura" o "solución pura", dejando a un lado cualquier distinción entre teoremas y problemas, excepto explícita aclaración.

La anterior caracterización es la manera estándar de introducir el problema, y la misma enfatiza la relación binaria "intrínseco a"; luego, entender en qué consiste una solución pura supone tener una comprensión satisfactoria de esta relación. En este punto, una tarea filosófica esperable sería la de *clarificar* la relación "intrínseco a" (aplicada a soluciones o demostraciones). Sin embargo, la tarea analítica no es suficiente, pues el objetivo es ganar comprensión de la práctica matemática. En efecto: entender por qué las soluciones puras son de interés en la *práctica matemática* es también un objetivo insoslayable. Por lo tanto, esta formulación usual o estándar sugiere que una investigación en torno a la pureza del método tiene por delante dos desafíos de naturaleza distinta:

> *Desafío semántico:* ofrecer una noción de *contenido* o *tópico* de un problema/teorema, de forma tal que, a partir de ella, pueda

caracterizarse rigurosamente la relación "intrínseco a".
Desafío del valor: iluminar en qué radica el *valor* de los métodos puros en la práctica matemática.

En este punto resulta manifiesto que la presentación usual del problema induce desafíos *asimétricos*, pues en ella hay un claro énfasis en la relación binaria, a la vez que se mantiene silente respecto a cómo entender el valor de la pureza. En otras palabras, mientras que esta manera de formular el problema de la pureza nos dice algo acerca de en qué consiste una solución pura, nada nos dice acerca de cómo entender, aunque sea de forma incipiente, en qué radica su valor. En otras palabras, esta concepción jerarquiza el desafío semántico (y con ello la tarea analítica) por encima del desafío del valor, el cual queda silente respecto a qué tarea la investigación debe llevar a cabo.[1] Sin embargo, y a pesar de este silencio, la tónica de la literatura específica se orienta a entender las soluciones puras como poseyendo un tipo específico de *virtud epistémica*, presuntamente diferenciada de otras virtudes usualmente reconocidas, tales como la "explicatividad", o la "simplicidad", por ejemplo. Puede apreciarse rápidamente entonces, que, por un lado, la concepción usual considera el predicado "pura" como *primariamente aplicado a demostraciones y soluciones*, a pesar de que en general se hable sin más de pureza del "método". Por otro lado, esta concepción prioriza la tarea analítica de clarificar las condiciones para clasificar demostraciones y soluciones en "puras" e "impuras", dejando en un segundo plano la cuestión del valor de los métodos puros.

Las últimas dos observaciones suscitan las siguientes interrogantes: ¿por qué *priorizar* el desafío semántico a costa de oscurecer el desafío del valor? ¿Por qué considerar "pura" como un predicado *primariamente* aplicado a demostraciones o soluciones, cuando las cuestiones metodológicas no se restringen a ellas? En la literatura relevante no se aprecia justificación alguna en favor de la primacía del desafío semántico, mientras que, por otra parte, es habitual que los casos de estudios sean demostraciones particulares de teoremas como el de la infinitud de los números primos, o el teorema de Desargues en el plano. Pero es evidente que "pura" nunca se restringe únicamente a demostraciones ni soluciones, pues inmediatamente nos vemos conducidos a preguntarnos por la pureza de una *definición* relevante para una demostración. Incluso si apelamos al ejemplo "clásico" de las soluciones analíticas de

[1] Una afirmación explícita de esta jerarquía puede apreciarse en Arana (2017, p. 208).

problemas geométricos, la cuestión de fondo radica en el uso mismo del *método de coordenadas*, más que en la solución particular en la que este interviene. Pero entonces, ¿tenemos en cada uno de estos casos un tratamiento diferenciado o unificado de "pura"? La concepción usual de la pureza del método también parecer ser silente a este respecto.

Creo que esta situación pone de manifiesto una falencia de la concepción usual que se presenta al momento mismo de su formulación. El objetivo de este artículo es alentar la adopción de una perspectiva más hospitalaria de la pureza del método, diferenciándola de la concepción usual en dos aspectos: por un lado, jerarquiza el desafío del valor y aborda el desafío semántico a la luz de este; por otro lado, relocaliza la "unidad de análisis" de las demostraciones/soluciones a las *teorías*, o más específicamente, a la *actividad de construir teorías autónomas* de otras áreas matemáticas (v.g. la construcción de una teoría proyectiva autónoma de la geometría euclidiana). Este abordaje tiene *a priori* algunas ventajas que serán exploradas con más detalle en la sección 3:

1) Al colocar la articulación fundamental de "pura" a nivel de la teoría, la pureza de las demostraciones, de las definiciones, etc. emerge con naturalidad, proveyendo así un tratamiento *unificado* de todas estas predicaciones de pureza. Se trata pues de la ventaja que ofrece una concepción más hospitalaria.
2) Al pensar la demanda de pureza como una "norma" que guía la práctica matemática de construir teorías autónomas, estamos atribuyendo a tal demanda un *contexto práctico* específico, lo cual nos permite, a su vez, no solo identificar el tipo de práctica matemática donde la demanda de pureza se muestra valiosa o incluso "fecunda", sino que ofrece además una *clave metodológica* para poder contrastar esta concepción con la práctica matemática concreta. Es decir, nos señala *dónde* buscarla.
3) El abordaje del desafío semántico a partir del desafío del valor, entendido del modo que se sugiere, pone de manifiesto con naturalidad la importancia que tiene para la discusión la "geografía" de las disciplinas matemáticas. Las habituales expresiones como "demostración puramente proyectiva del teorema de Desargues", o "definición puramente aritmética de número complejo", solo se entienden a la luz de una "imagen" del mapa de las disciplinas matemáticas, y en particular, de la *autonomía* que cada una de ellas pueda tener. En otras palabras, esa imagen de la geografía matemática es imprescindible para entender el predicado "pura".

Para motivar esta concepción hospitalaria de pureza, en la sección 2 profundizaré un poco en los desafíos arriba presentados para la concepción usual, mientras que en la sección 3, caracterizaré de forma muy esquemática la concepción hospitalaria a partir de algunas observaciones de Hilbert sobre el método axiomático. Destacaré en particular cómo esta concepción relocaliza la pureza en un nivel más profundo que la usual, a partir de la jerarquización del desafío del valor. En la sección 4, examino la noción de *contenido informal* de Arana y Mancosu (2012), a efectos de señalar cómo esta se ve enriquecida gracias a esta nueva concepción. Algo análogo haré, por otra parte, en la sección 5, respecto de las propuestas de Detlefsen (2008) y Detlefsen y Arana (2011) acerca del desafío del valor. Finalmente, en la sección 6 reconsidero el desafío semántico a la luz de la concepción hospitalaria de pureza y señalo algunos problemas que deben ser afrontados por esta.

2. Los desafíos fundamentales

¿De dónde proviene la concepción usual de la pureza? Esta es comúnmente asociada a David Hilbert (1899a, 1902a, 1971) y en particular, el siguiente pasaje suele emplearse para motivar esa formulación (v.g. Pambuccian, 2001 y Arana, 2008):

> [e]n la matemática moderna se practica muy a menudo este tipo de crítica, de acuerdo con la cual se intenta preservar la pureza del método [*die Reinheit der Methode*], es decir, utilizar en la demostración de un teorema, en la medida de lo posible, solo los medios que requiere [*nahe gelegt*] el contenido [*Inhalt*] del teorema. (Hilbert, 1899a, pp. 315-316)

Tomando este pasaje como punto de partida, llegamos naturalmente a la caracterización “usual” de la pureza del método; en efecto, Hilbert dice que una demostración pura es aquella que solo se basa en lo que es “requerido por el contenido del teorema”. Así pues, una demostración pura es “intrínseca” en la medida de que los medios que emplea son “requeridos” por el contenido del teorema. Así mismo, la pureza es claramente de naturaleza *tópica* —i.e. es respecto del contenido [*Inhalt*] del teorema que se introduce la relación “intrínseco a”—. En cuanto al valor de la pureza, Hilbert dice que los matemáticos “modernos” (¿quiénes?) ven en la pureza un *requisito* para las demostraciones. Sin embargo, Hilbert no dice palabra alguna acerca de *por qué* la pureza de una demostración es valorada, o, si se prefiere, por qué la impureza sería objeto de crítica por parte de los matemáticos modernos. En tal sentido, este pasaje no es valioso tanto por lo que nos dice acerca del valor de la pureza del método, sino porque, en razón de la indudable autoridad matemática de Hilbert, la cita de arriba nos informa sobre lo que está "en el aire" de la práctica matemática decimonónica. Por último, nótese el matiz que Hilbert introduce en cuanto a la demanda de pureza, de acuerdo con el cual es "en la medida de lo posible" que esta se exige. Este matiz — ausente en la formulación usual del problema— es un claro indicio de que Hilbert está considerando la posibilidad de que haya un *hiato* entre el contenido de un teorema y los medios que *necesitamos* para demostrarlo; es decir, bien puede ocurrir que se requieran métodos impuros para demostrar el teorema, en cuyo caso la demanda no sería legítima. Por último, también resulta natural concebir la pureza de las demostraciones como un tipo específico de *virtud* o *ideal* demostrativo; en efecto, Hilbert se refiere a la pureza como un requisito de *demostraciones*. La concepción usual emerge entonces, con naturalidad de este pasaje allende el matiz recién señalado, al cual volveré en poco más abajo.

En cuanto a los desafíos introducidos en la sección anterior, hay algunas puntualizaciones que es preciso realizar. Con el desafío semántico, tenemos, de hecho, dos retos: ofrecer, por un lado, un concepto de contenido de un enunciado (ya sea un teorema o un problema) lo suficientemente robusto como para, por otro lado, poder definir, a partir de él, una relación aparentemente tan fuerte como "intrínseco a". Una vez que tengamos tal concepto de contenido, podemos proceder de manera similar a definir el concepto de consecuencia lógica: partimos de la idea de "verdad en una estructura", y luego, definimos –respecto a ese concepto– la relación de consecuencia lógica a partir de algunas "condiciones de adecuación".

Así pues, en lo que respecta a este desafío, un ejemplo de condiciones de adecuación para un concepto de contenido en la literatura es uno introducido en términos de "identidad de demostraciones". El énfasis aquí es garantizar que el predicado "puro" (y su negación) pueda usarse para discriminar efectivamente *diferentes* demostraciones de un mismo teorema. Kahle y Pulcini expresan esta "condición de adecuación" del siguiente modo:

> [...] el hecho de clasificar una determinada demostración $\pi : T$ [*como pura / impura*] no es solo una cuestión de confrontar el "contenido" de π con el "contenido" de T . En realidad, habría que poder descartar la posibilidad de *reescribir* la demostración en una versión más elemen-

> tal π' cuyo "contenido" ya no está allende [*outstrip*] al "contenido" de *T*. (Kahle & Pulcini, 2018, p. 131; énfasis añadido)

La importancia de esta observación es evidente: si una demostración introduce alguna *expresión* que, de alguna manera, introduce un concepto que no "forma parte" del contenido del teorema, entonces no por ello necesariamente ocurre que la demostración introduce *nuevos* conceptos. Así pues, podría decirse que, si una expresión (o símbolo matemático) tal puede ser eliminada al reescribir la demostración, sin cambiar la identidad de esta, entonces la presencia de esa expresión no es indicio de impureza. Algo análogo podría pensarse para los conceptos o *definiciones* de las expresiones matemáticas: bien podría ocurrir que, en el contexto de una demostración, una expresión, v.g. $\cos\vartheta$, no requiera –para la demostración– que se defina como una *función trigonométrica* sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, más allá de las *razones trigonométricas*, sino que simplemente podría entenderse como designando, v.g. el cateto de un triángulo pitagórico. En tal caso, el empleo de la notación "$\cos\vartheta$" no implica de por sí que la demostración introduzca el concepto de función trigonométrica.

Por lo tanto, una noción de contenido adecuada para satisfacer esta condición de adecuación tendría que ser sensible a los escenarios descritos en el párrafo anterior (sin descartar la posibilidad de otros), y, en tal sentido, dicha noción estaría relacionada con un problema por demás huidizo desde un punto de vista lógico: la identidad de demostraciones. Ciertamente se trata de un problema *semántico*, aunque aquí el punto no tiene por qué consistir es definir una "semántica de demostraciones" para interpretar derivaciones en un lenguaje formal.[2] La cuestión *práctica*, es decir, la manera en que los matemáticos de ordinario juzgan si una demostración (informal) es distinta de otra demostración, no recae sobre la formalización de las mismas (y su pertenencia a una clase de equivalencia).[3]

Otra condición de adecuación razonable, y en cierta forma, más fundamental, hace hincapié en la necesidad de que el contenido de los teoremas goce de "cierta independencia" respecto de sus demostraciones, so pena de *trivializar* el predicado "pura". Evidentemente, este sería el caso con las soluciones *impuras*. Por el contrario, si las demostraciones fueran un factor *indispensable* para el contenido de los teoremas, entonces *todo* teorema tendría *a priori* —es decir, por la misma noción de

[2] Cf. las fuentes clásicas al respecto, tales como Prawitz (1971, p. 237) y Troelstra (1975).

[3] Puede consultarse a este respecto Dawson (2015) y Rav (1999).

contenido— una demostración pura. En efecto, "[...] parece inverosímil que esto pueda ser cierto *a priori*, simplemente como consecuencia del análisis de la noción de contenido. La pureza acabaría siendo trivializada" (Mancosu y Arana, 2015, p. 30).[4]

Esta observación deja de lado la viabilidad de una concepción de tipo "inferencialista" del significado, a la hora de transitar el desafío semántico. Pues, si una concepción tal se adoptara, la trivialización de "pura" radicaría en garantizar, por la mera concepción de significado, que *todo* teorema tenga una demostración pura. Así pues, bien podría decirse que esta condición de adecuación representa una "intuición semántica nuclear", en la medida en que su satisfacción es necesaria para que podamos *formular* la noción misma de "demostración intrínseca". No obstante, esta condición de adecuación no implica que las demostraciones no jueguen ningún papel en absoluto; en efecto, una formulación de esta condición de adecuación podría ser la siguiente:

> *Intuición semántica nuclear:* el contenido de teoremas o problemas tiene "cierta independencia" respecto de sus demostraciones (o soluciones).

En efecto, esta intuición semántica *no* dice que las demostraciones sean completamente irrelevantes para el significado, sino que lo último tiene *cierta* independencia respecto de lo primero. Articular "cierta" es el desafío conceptual detrás de esta intuición semántica. Así pues, tenemos —al menos— dos condiciones de adecuación para una noción de contenido satisfactoria para caracterizar "demostración pura". En la sección 4 presentaré y discutiré específicamente la noción de *contenido informal* de Arana y Mancosu (2012) en relación con esta última condición de adecuación. La primera condición, por su parte, quedará excluida de este artículo dado que, por un lado, la intuición semántica nuclear coloca un problema más fundamental y, por otro, una concepción como la que aquí se pretende motivar no se restringe únicamente a las demostraciones, pero en absoluto puede dispensar de la segunda condición. Así pues, en lo sucesivo "desafío semántico" referirá exclusivamente a la condición introducida por Arana y Mancosu.

En razón de la asimetría que se apreció en los desafíos que la concepción usual introduce, es difícil poder decir algo en abstracto sobre el desafío del valor. Sin embargo, siguiendo la tendencia de la literatura podemos asumir que, debido a que "pura" es un

[4] Véase también Arana y Mancosu (2012, pp. 335-336), Arana (2014, §4).

predicado primariamente aplicado a demostraciones, podría entenderse que la pureza involucra un tipo de *virtud o ideal epistémico* (Detlefsen, 2008), de forma análoga a las demostraciones "explicativas", "elegantes", "naturales", o "simples", por ejemplo.[5] Esto conduce a resaltar que el valor de las demostraciones puras está allende la validez de estas, por lo que las soluciones impuras no son *lógicamente inválidas*. Así pues, en esta situación, podría pensarse en elaborar una propuesta que *asocie*, con la caracterización hilbertiana de pureza (o una clarificación de la misma), tales o cuales características *epistémicas*, *cognitivas*, o de algún tipo análogo. Naturalmente, cualquier propuesta para caracterizar la virtud de la pureza tendría que explicar cómo esa virtud emerge del carácter intrínseco de las demostraciones, aunque esto no es en sí mismo decir mucho; por otra parte, una virtud tal tendría que ser identificada en la práctica matemática. A tales efectos, no bastaría con identificar una "tendencia" a "preferir" las demostraciones intrínsecas, pues además debemos poder identificar el *porqué* de esas preferencias; o alternativamente, identificar en el contexto de qué prácticas matemáticas emerge con naturalidad la demanda de pureza.

Sea lo que fuere que entendamos por "intrínseco", parece evidente que una demostración tal parece estar reñida con las demostraciones que introducen *conexiones* entre lo que el teorema afirma y conceptos o nociones que, de algún modo, no están presentes o supuestos por este. Es precisamente en este punto donde el valor de las demostraciones puras puede ser severamente cuestionado, pues es evidente la *fecundidad* que históricamente ha representado el estudio de las conexiones entre áreas de las matemáticas que parecen estar "alejadas", por así decirlo. A partir de aquí emerge una objeción inmediata al valor de las demostraciones puras, a saber, ser poco "fecundas" en el mejor de los casos, o impedir el desarrollo de las matemáticas, en el peor de los casos. Hilbert ya advertía al respecto que a menudo hay una razón más "profunda y justificada" para emplear medios impuros, pues se revelan "hermosas y fructíferas relaciones", por lo que "nunca hay que dejar pasar por alto un suceso de este tipo en el que se entrecruzan diferentes áreas" (Hilbert, 1899b, p. 236).

La siguiente observación de Kreisel hace el mismo énfasis que Hilbert:

[5] En este punto es pertinente preguntarse si la pureza es o no un tipo de virtud *diferenciada* de las otras. En cuanto a la relación entre pureza y simplicidad, por ejemplo, véase Arana (2017).

> Pero también está el vacío creado por no decir simplemente en voz alta qué (conocimiento) se obtiene con las demostraciones impuras, por ejemplo, con las demostraciones analíticas en la teoría de números: *conocimiento de las relaciones entre los números naturales y el plano complejo o, más ampliamente, entre las propiedades aritméticas y geométricas*. Es precisamente este conocimiento el que proporciona nuevos medios eficaces de comprobación de las demostraciones: si esto entra en conflicto con algún ideal de rigor, tanto peor para el ideal (que se está evaluando). (Kreisel, 1980, p. 167)

Las demostraciones impuras son también iluminadoras, en tanto permiten poner de manifiesto *conexiones* antes desconocidas, por lo que, en tal sentido, estas demostraciones impuras se muestran fecundas a la hora de aumentar nuestro conocimiento matemático en la dirección contraria al que lo harían (caso que así ocurriese), las demostraciones puras. Carlo Cellucci por otra parte, sostiene de forma bastante contundente que "en el desarrollo histórico de la matemática, la demanda en favor de la pureza del método ha sido extensamente ignorada" (Cellucci, 2017, p. 299). El punto de Cellucci es que la satisfacción *indiscriminada* de esta demanda, habría obstruido avances sustantivos en matemáticas, tales como la demostración del último teorema de Fermat.[6]

Kreisel y Cellucci parecen converger en esta suerte de "escepticismo" respecto de la pureza del método, el cual apunta contra la pureza en virtud de que esta atenta contra la *fecundidad* matemática, es decir, este escepticismo nos enfrenta con el dilema de elegir entre pureza y fecundidad de los métodos. Pero el mismo admite un matiz: la sospecha no radica tanto en sostener que *no hay* interés alguno en la pureza del método, sino en considerar que los métodos puros sean *siempre* preferibles a los impuros. A mi entender, esto sugiere que sería poco recomendable avanzar en una explicación del valor de estos métodos, *asumiendo* que bajo cualquier circunstancia el mismo es manifiesto. ¿Acaso la virtud de las demostraciones puras ocurre bajo ciertas condiciones específicas? Y si es así, ¿qué tipos de prácticas matemáticas motivan o alientan la demanda por métodos considerados "puros"? Finalmente, es muy importante tener presente que la objeción de fecundidad está claramente dirigida contra una concepción de la pureza como la usual, pues esta objeción asume que "pura" es un predicado de demostraciones.

[6] Cf. Pillay (2021) y Lehet (2021).

3. Hacia una concepción más hospitalaria de la pureza del método

La formación de teorías es evidentemente una práctica matemática importante; habitualmente involucra la investigación en fundamentos de una disciplina y es una ocasión para la creación fecunda de nuevas matemáticas. La concepción de pureza que aquí expongo muy esquemáticamente consiste en sostener que la articulación fundamental de "pureza" se encuentra en este plano, siendo las restantes predicaciones de pureza subsidiarias de esta. Lo que dota de valor o "interés" a los métodos puros (y a las demonstraciones) consiste, entonces, en que los mismos satisfacen una demanda o requisito metodológico ligado fundamentalmente a la *construcción de teorías* matemáticas. En esta sección sugiero de forma muy esquemática que este es el caso cuando se trata del método axiomático de David Hilbert en los *Fundamentos de geometría* de 1899. Este sería, por lo tanto, un contexto —no necesariamente el único— donde la pureza del método deviene prominente, y la razón de ello es que la demanda de pureza y el método axiomático hilbertiano están, según intentaré explicar a continuación, estrechamente relacionados.[7]

El punto fundamental de la lectura que aquí presento radica en la siguiente distinción: por "método axiomático" debe entenderse, por un lado, la *investigación* axiomática y, por otro lado, la *teoría* axiomática. Lo primero es una *actividad* matemática (usualmente asociada a los estudios en fundamentos), mientras que lo segundo es un pretendido *producto* de esa práctica; en efecto, "método axiomático" no se reduce a lo segundo, en el caso de Hilbert, aunque no resulta extraño que se emplee esta expresión para referirse únicamente a la estructura de la presentación de teorías matemáticas en contextos meta-matemáticos. Como consecuencia de esta distinción, podemos distinguir también entre una *demanda* de pureza operativa en la investigación axiomática, de la pureza como un *atributo* o *propiedad* de la teoría axiomática. En lo que

[7] Este énfasis en el método axiomático no debe conducir al lector a pensar que la pureza del método no tiene lugar en teorías no axiomáticas. Más aún: en sus investigaciones en teoría de números algebraicos durante la década de 1890, Hilbert no empleó su método axiomático a pesar de que estas investigaciones *coinciden* con sus investigaciones axiomáticas en geometría euclidiana. No obstante, en diversos trabajos de esta época es manifiesta la motivación "purista" que anima a Hilbert a presentar nuevas demostraciones de teoremas relevantes (fundamentales), con el fin de reformular partes sustantivas de la teoría algebraica de números (v.g. teoría de ideales, cuerpos ciclotímicos). Véase, a modo de ejemplo, Hilbert (1894, 1896, 1902a).

resta de esta sección argumentaré esquemáticamente que, por un lado, una teoría axiomática "pura" consiste en una teoría *autónoma* o *autosuficiente*, siendo tal cosa una característica inherente a la noción misma de "teoría axiomática" de Hilbert. Aquí es donde se aprecian las ventajas 1) y 3) de la sección 1 (pp. 3-4). Por otro lado, la "regla" o "principio" fundamental que Hilbert formula en el epílogo de los *Fundamentos de geometría* que guía la investigación axiomática puede entenderse como una formulación acorde a la investigación axiomática de la *demanda* de pureza. Evidentemente, aquí se apreciará la ventaja 2) de la sección 1. En consecuencia, lo que obtenemos de esta lectura es que la pureza del método estaba, como demanda y como propiedad, estrechamente vinculada al método axiomático de Hilbert.

Con relación a la pureza como propiedad de teorías axiomáticas, recuérdese la idea misma de teoría axiomática de Hilbert como *trama de conceptos* [*Fachwerkes von Begriffen*], constante en su pensamiento. Para apreciar cómo una cierta idea de autonomía está contenida en la idea misma de teoría axiomática, debe tenerse presente que esta trama es tal "que a cada objeto y a cada hecho de la esfera de conocimiento [*Wissensgebietes*] de que se trate [la teoría] les corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo" (Hilbert, 1996, p. 23). Una teoría axiomática o "trama de conceptos" *reconstruye* entonces, una "esfera de conocimiento" [*Wissensgebietes*] *dada*, siendo en relación o en correspondencia con esta que la teoría es, por ejemplo, una axiomatización de la geometría euclidiana elemental. Esta correspondencia con una esfera de conocimiento introduce una noción de "completud" debido al requisito de que *cada* objeto y *cada* hecho de ese campo se corresponda con los conceptos y las relaciones lógicas de la teoría. Esta noción de completud es *pre-formal* debido a que "esfera de conocimiento" no es una noción exacta; en efecto, Hilbert da por satisfecha esta correspondencia en los *Fundamentos*, por ejemplo, cuando los axiomas permiten deducir los teoremas "más importantes de la geometría" (Hilbert, 1971, p. 2), mientras que en sus notas para un curso de verano sobre fundamentos de geometría de 1902 (Hilbert, 1902b), la completud del sistema de axiomas se alcanza cuando todos los teoremas o "hechos" [*Tatsachen*] que componen la teoría pueden ser deducidos lógicamente a partir de los axiomas (véase Corry, 2006, §1; Giovannini, 2015, cap. 3).

Esta noción preformal de "completud" relativa a un campo de conocimiento es de naturaleza pragmática o cognitiva (Abrusci, 1981; Awodey & Reck, 2002; Corry, 2006, p. 142; Sieg, 2009, p. 339). En tal sentido, la *delimitación* de esa esfera de conocimiento no es una cuestión lógica sino una cuestión relativa a la práctica matemática. Así pues, podemos entender que una "esfera de conocimiento" es una *disciplina* suficientemente madura; esto es, no es tanto un cuerpo de conocimiento (proposiciones, técnicas y conceptos organizados)[8], sino un "conjunto de prácticas y de cuerpos teóricos asociados, en plural" (Ferreirós, 2016, p. 197). En este sentido, a menudo ocurre que la palabra "teoría" significa "disciplina". En efecto, la "teoría de números" es un caso muy claro, pues esta expresión no refiere a un cuerpo teórico bien definido, sino un crisol de prácticas matemáticas que se diferencian respecto a los conceptos centrales y las metodologías privilegiadas.[9] Para que una investigación axiomática pueda ser llevada a cabo, tendríamos que "congelar" una práctica en un cuerpo de teorías fijo, para proceder a un análisis axiomático del mismo. Es precisamente en ese "congelamiento" donde delimitamos también el *contenido (o tópico)* de la disciplina a ser axiomatizada, pues al hacerlo también se *seleccionan o introducen* los conceptos que son importantes, acerca de los cuales trata la teoría.[10] Llegado este punto, estamos en condiciones de entender cómo esta condición de completud preformal implica que las teorías axiomáticas sean autónomas o autosuficientes. Para apreciarlo basta observar lo siguiente:[11] un sistema de axiomas es *autónomo* o *autosuficiente* cuando todos ellos se corresponden con "hechos" (básicos) de la disciplina que el sistema axiomatiza, pues, de lo contrario, la teoría no sería "completa" aun cuando se empleen principios que permitan deducir todos, o los más importantes teoremas de esa disciplina.[12]

Atendiendo a la anterior caracterización del atributo de pureza como autonomía de las teorías, el lector habrá apreciado que son los *axiomas* el *locus* de la misma. Pero entonces, ¿es esto una garantía de que

[8] Véase Corry (2003, pp. 3 y ss.).

[9] Tal cosa es la que dan a entender *grosso modo* los adjetivos "algebraica", "analítica", "geométrica".

[10] Evidentemente podemos delimitar estrictamente la esfera de conocimiento identificando, por ejemplo, un conjunto de teoremas de una *teoría* preexistente, como la de los *Elementos* de Euclides. La razón por la que prefiero emplear "disciplina" en vez de "teoría" es porque la primera captura mejor el espíritu de la investigación axiomática como investigación sobre *fundamentos* en la práctica matemática, donde lo que se investiga son los fundamentos de una disciplina.

[11] Este sentido de "autonomía" captura el uso de la expresión que puede ver en Giovannini (2015), Giovannini (2016), Giovannini et al. (2017) y Lassalle Casanave y Giovannini (2021).

[12] Más aún: este último aspecto era algo presente "en el aire" de la práctica matemática geométrica del siglo XIX; tanto Wiener (1890), Schur (1898) como Enriques (1898, p. 369) se inscriben netamente dentro de esta misma preocupación. Klein (1979, p. 3) sintetiza elocuentemente esta tendencia.

las *demostraciones* en la teoría sean puras —i.e. que queden excluidos en sus métodos de inferencia nociones ajenas a la disciplina—? Esta es una cuestión muy relevante, pues como he sugerido en la sección 1 (página 96), esta concepción hospitalaria promete *unificar* las distintas predicaciones de pureza (ventaja 1)). Sin embargo, tal unidad puede objetarse si la propiedad de pureza no se transfiere sin más de la teoría a las demostraciones. En mi opinión, el punto crítico aquí es la noción misma de teoría axiomática; en efecto, el análisis *lógico* de esta noción hace de las teorías una entidad sintáctica con una lógica explícita, gracias a lo cual se delimita prístinamente tanto las sentencias como las inferencias que pertenecen a esa teoría.[13] En tal caso, y asumiendo que la lógica de la teoría es inocua en lo que hace al *contenido* de la misma, entonces, si la teoría es pura, sus demostraciones también. Pero esta no es la situación cuando pensamos en la construcción de teorías en la práctica matemática, pues no resulta extraño que se empleen, con el fin de obtener ciertos resultados, propiedades bien conocidas de algún *modelo* de la teoría, en vez de los axiomas y principios de inferencia que caracterizan la teoría.[14]

La unificación de estas dos predicaciones de pureza hay que buscarla, en la práctica matemática, en la construcción de teorías axiomáticas. Aquí la atención es "selectiva" pues no *cualquier* demostración de *cualquier* teorema importa por igual; en efecto, las demostraciones cuya pureza importa en los *Fundamentos* de Hilbert son las de los teoremas de Pascal (Pappus), Desargues, o De Zolt, por ejemplo, pues son *fundamentales* para distintas teorías (o "subteorías", si se quiere) dentro de los *Fundamentos* (teoría de la euclidiana proporción, geometría euclidiana del espacio tridimensional y teoría del área respectivamente). Esta atención selectiva es típica en la construcción de teorías y la investigación axiomática en los fundamentos de una disciplina. Lo habitual es que solo algunas definiciones y teoremas "fundamentales" justifiquen tal preocupación purista, por lo que no necesariamente *cualquier* demostración *en* la teoría ha de ser pura aun cuando la misma sea "autónoma". Por lo tanto, si lo que nos interesa es entender la prác-

[13] Cf. Schlimm (2013, p. 76).

[14] Así, por ejemplo, si tenemos una axiomatización de la geometría proyectiva, podríamos, dado que el modelo más importante es el del plano proyectivo real, emplear técnicas disponibles de la geometría euclidiana y la geometría analítica para demostrar teoremas. Su empleo está lógicamente habilitado en virtud del *modelo,* aun cuando se tratarían de métodos "impuros" (Hartshorne, 1967 hace precisamente esto). La relación entre el empleo de métodos habilitados por un modelo de la teoría y la pureza de los mismos es un punto importante en la investigación de Ferraro y Panza (2012) sobre la teoría analítica de funciones de Lagrange.

tica matemática, es perfectamente razonable afirmar que es en la demostración de *algunos* teoremas importantes donde se unifican la pureza de las teorías con la pureza de las demostraciones, aun cuando tal cosa no garantice que *toda* demostración en la teoría sea pura. En efecto, la pureza de esas demostraciones es lo importante para la obtención de una teoría pura desde una perspectiva práctica.

Por añadidura también se transparenta el *valor* de la pureza de esas demostraciones, pues son un paso indispensable para la obtención de una teoría pura. Así mismo, este punto de vista "hospitalario" también sugiere una explicación directa acerca de por qué las atribuciones de pureza a demostraciones siempre se hacen con referencia a una disciplina o teoría matemática (esta era la ventaja 3) de la página 96). En efecto, habitualmente las atribuciones de pureza se realizan con referencia a una disciplina, por lo que la relación "intrínseco a" no debe entenderse como afirmando que las demostraciones puras lo son con respecto al contenido *individual* o *aislado* del enunciado del teorema. Así pues, la suposición de una cierta *delimitación* o "geografía" de al menos algunas disciplinas matemáticas, se explica por la importancia que tiene, para la construcción de teorías (axiomáticas), el que ciertas demostraciones se inscriban dentro de la disciplina o subdisciplina que la teoría axiomatiza. Esta característica se explica naturalmente cuando atendemos a la pureza como atributo de teorías axiomáticas.

La ventaja 2) —página 3— de esta concepción hospitalaria respecto de la concepción estándar radicaba en iluminar un contexto donde la demanda de pureza pueda emerger con naturalidad. A partir de los párrafos precedentes queda claro que ese contexto puede ser el de la construcción de teorías axiomáticas hilbertianas. Sin embargo, y aun cuando la pureza/autonomía de las teorías axiomáticas no es una propiedad accidental de las mismas, todavía resta entender cómo la *investigación* axiomática hilbertiana codifica las *demandas* puristas y cómo la satisfacción de una demanda purista conduce o favorece la autonomía de la teoría resultante. La respuesta a la primera interrogante la podemos hallar en una observación presente en el epílogo de los *Fundamentos de geometría*. Allí, Hilbert presenta el "principio" o regla fundamental que ha guiado la investigación cuyo producto es *Fundamentos de geometría*, y la cual, a su vez, Hilbert relaciona con el ideal de pureza del método. Esta regla se basa en

> [...] hacer que la discusión de cada cuestión tenga un carácter tal que permita examinar al mismo tiempo si es posible o no responder a esta cuestión siguiendo un método previamente determinado y

> empleando ciertos medios limitados. [...] la exigencia de la “pureza” de los métodos de demostración que han defendido muchos matemáticos con gran énfasis [...] no es en el fondo otra cosa que una forma *subjetiva* de la regla básica seguida aquí. (Hilbert, 1971, pp. 106-107; énfasis añadido)

La interpretación de esta regla en conexión con el método axiomático y el modo de entender su relación con la demanda de pureza no es un asunto trivial.[15] Sin embargo, es factible señalar cuatro puntos, acerca de los cuales no podré extenderme mayormente aquí, pero será suficiente para el presente propósito. En *primer* lugar, se trata de una regla práctica que guía la investigación axiomática, pero no afirma una suerte de propiedad *metateórica*, como la consistencia o la independencia de los axiomas. Es decir, la regla opera en la *formación* de las teorías axiomáticas. En otras palabras, esta regla opera en la *investigación* axiomática dándole formato a las cuestiones tratables de acuerdo a el método axiomático. En *segundo* lugar, la regla pone en el centro el concepto de *demostración* y los resultados de *independencia*, aunque no se trate de la independencia específicamente de los axiomas, sino de la *imposibilidad* de demostrar una proposición a partir de ciertos axiomas, o a la posibilidad efectiva de demostrar una proposición *sin emplear* tales o cuales axiomas. En otras palabras, en la aplicación de esta regla podemos encontrarnos tanto con demostraciones —metateóricas— de imposibilidad, como con demostraciones *dentro* de la teoría que no emplean tales o cuales axiomas —i.e. demostraciones de la “dispensabilidad” de un axioma—. La regla, entonces, puede leerse de la siguiente manera: la investigación axiomática de una disciplina matemática se lleva a cabo de tal manera que, ante cada problema, o conjetura respecto a la demostración de una proposición particular a partir de ciertos axiomas o “medios limitados”, se examina su posible “independencia” (en los dos sentidos señalados) respecto de estos axiomas o un subconjunto de ellos.

En *tercer* lugar, y siguiendo una sugerencia de Hallett (2008), puede pensarse que esta regla permite *transformar* la demanda de pureza, de forma tal de, en vez de interrogar sobre el carácter tópicamente intrínseco de los métodos (*simpliciter*), interrogar hasta qué punto una disciplina puede desarrollarse en *ausencia* de los conceptos (o proposiciones) que se *creen* “ajenos” a esa disciplina —i.e. no comprendidos dentro de la *delimitación* de la disciplina—.[16] En otras palabras, si concedemos

[15] En Hallett (2008) puede encontrarse un estudio en profundidad a este respecto.

[16] Aquí no pretendo afirmar que esta sea la *única* cuestión relevante, aunque

que los axiomas introducen conceptos —v.g. el axioma de Arquímedes (axioma V en los *Fundamentos*) introduce un concepto de "longitud de segmentos"[17]—, entonces la axiomatización de la disciplina arroja una delimitación conceptual de la misma —i.e. delimita su contenido—.[18] De esta manera, una "conjetura purista" que afirme el carácter ajeno de un concepto en la demostración de un teorema se codifica, dentro de la investigación axiomática, bajo la forma de una interrogante del tipo "¿es la proposición en cuestión independiente de tal o cual axioma?". El caso es que para pronunciarse acerca de esto, los resultados de "independencia" son la clave. Así pues, un resultado de dispensabilidad puede ser un resultado en favor de que la pretensión (o conjetura) purista es correcta, mientras que uno de imposibilidad podría leerse como la confirmación de que *no es posible* dar lugar a la demanda purista. Este es el tipo de cuestiones "objetivas" que la investigación axiomática trata.

En los *Fundamentos* se puede apreciar claramente la aplicación de esta regla, por lo que puede decirse con seguridad que esta regla está presente en la práctica matemática de Hilbert: su reelaboración de la teoría euclidiana de la proporción *independiente* del axioma arquimediano (axioma V), la introducción de coordenadas con base en un cálculo de segmentos (*sin presuponer* la noción de número), así como el tratamiento del postulado de De Zolt *independientemente* de las nociones de magnitud y número, para desarrollar una teoría del área poligonal, son claros ejemplos de ello.[19] Estos son ejemplos de resultados de independencia que se demuestran *dentro* de la teoría. Por otra parte, el tratamiento del teorema de Desargues es un ejemplo de una demostración de *imposibilidad*, llevada a cabo desde una perspectiva metateórica.[20]

---

claramente sería una de ellas.

[17] Este axioma nos permite definir para cada segmento un número positivo de manera unívoca. Así, este axioma permite la introducción del número en geometría, en la medida en que permite determinar el conjunto de las longitudes de cada segmento. Esto no implica, por otra parte, que para todo número real podamos —inversamente— asociarle un segmento. Esto último es tarea de otro axioma, el llamado "axioma de completud", el cual no figura en la primera edición de los *Fundamentos*. A este respecto puede consultarse Giovannini (2015, cap. 7).

[18] Esta concesión no es filosóficamente trivial, pues introduce el *desiderátum* de que cada axioma (o conjunto bien delimitado de axiomas) debe contener "una sola idea". De acuerdo con Corry (2006, p. 142) aquí está involucrado el requisito de *simplicidad* del sistema axiomático; sin embargo, Hilbert no provee ningún criterio "metamatemático" para decidir si un axioma (o conjunto de axiomas) es *más simple* que otro.

[19] Véase las referencias en la nota 11.

[20] Respecto de este teorema, véase la sección 4 más abajo.

Todas las investigaciones de Hilbert referidas más arriba están motivadas por demandas de pureza provenientes de la práctica matemática de su tiempo, y en particular, por el interés de erigir, hasta cierto punto al menos, teorías *autónomas*: la geometría proyectiva autónoma de la euclidiana, la geometría euclidiana (teoría de la proporción y del área) independiente del axioma arquimediano, la aritmetización del análisis, etc. Tal actividad exige que la demostración de ciertos teoremas, articuladores de las mismas, sean "puras" —i.e. independiente de nociones "extrañas" al campo disciplinar de la *teoría*—. Así pues, la construcción de una teoría autónoma supone poder mostrar que *ciertos* resultados importantes para la disciplina puedan probarse *dispensando* de los conceptos o proposiciones que se presumen "extraños" a la misma. Por lo tanto, cabe perfectamente pensar que, así como la autonomía no era una característica meramente accidental de las *teorías axiomáticas* hilbertianas, también puede pensarse que la demanda de pureza es también inherente a la *investigación axiomática*. En definitiva, lo que he intentado en esta sección es ilustrar esquemáticamente cómo el método axiomático hilbertiano puede instanciar la idea rectora de una concepción "hospitalaria" de la pureza del método, así como sus tres ventajas respecto de la concepción usual. En las secciones 4 y 5 intentaré mostrar que algunos aspectos de esta concepción hospitalaria están de hecho presentes en las respuestas de la concepción usual a los desafíos semántico y "del valor".

4. Desafío semántico y *contenido informal*

Arana y Mancosu (2012, §4.5) introducen un concepto de contenido pertinente para la discusión, en tanto que claramente satisface la intuición semántica nuclear de la página 100, pero también interesa porque su viabilidad para discriminar entre demostraciones puras e impuras parece asumir consideraciones como la 3); por último, esta noción puede interpretarse como dando un lugar central a la actividad *heurística*, y tal cosa es relevante para la concepción hospitalaria en virtud de que esta jerarquiza la norma de pureza como una "regla práctica" que guía la formación de teorías, de acuerdo con 1) y 2). Se trata pues del concepto de *contenido informal* o *comprensión ordinaria*. A grandes rasgos, este concepto considera lo que está *explícitamente* establecido en las formulaciones de los problemas o teoremas, y asigna a las expresiones matemáticas implicadas en ellos, las definiciones (o conceptos) más "básicas" u "ordinarias". Por lo tanto, podemos reformular la noción de "solución tópica pura" de la siguiente manera: las soluciones tópicamente puras de los problemas "se basan únicamente" en lo que constituye la comprensión básica o el contenido informal de ese problema. Así pues, estas nociones de "basicidad" u "ordinariedad" son esenciales para la concepción de Arana y Mancosu sobre la pureza de los métodos (cf. Detlefsen y Arana, 2011, p. 17). Ellos caracterizan esta noción de contenido diciendo que la "ordinariedad" es un grado de comprensión por parte de un agente, que es

> [...] suficiente para un intento bien intencionado [*well-intentioned attempt*] de demostrar ese enunciado, incluso si tales intentos pueden estar condenados al *fracaso en casos particulares*. Tal capacidad es típica de lo que consideramos comprensión "básica" u "ordinaria" de los enunciados matemáticos, y esta *habilidad* está claramente extendida, por ejemplo, entre los *neófitos* en matemáticas. (Arana & Mancosu, 2012, p. 335; énfasis añadido)

La comprensión ordinaria de un enunciado es suficiente para llevar a cabo un intento bienintencionado de demostrarlo, pero no es suficiente para garantizar su demostración. En otras palabras: las demostraciones *no son esenciales* para la comprensión ordinaria, pero se requiere *cierta capacidad* para intentar demostrar el enunciado. Por lo tanto, esta noción está orientada a satisfacer la segunda *intuición semántica nuclear*. Por otra parte, el carácter cognitivo de esta noción apunta a que el contenido de un enunciado para un agente emerge a través de la acción —que bien podemos adjetivar de "heurística"— de *intentar seriamente* demostrar dicho enunciado.[21] Pero para que esta noción sea operativa para intentar atribuir tal o cual comprensión al agente, es necesario atribuirle a este ciertas "herramientas" cognitivas o conceptuales, digamos, que de algún modo *restringen* su horizonte de actuación; caso contrario, no tendríamos manera de circunscribir hasta dónde llega la comprensión del agente y, en consecuencia, el contenido del enunciado. Así pues, previendo tal tipo de restricción podemos sugerir que aquello que el agente comprende en un enunciado —su contenido informal— consiste en una suerte de "invariante conceptual" que los agentes aprehenden cuando intentan demostrar el enunciado. En efecto, "básico", "ordinario" y "neófito" sugieren un tipo de restricción.

[21] Claramente esta consideración se restringe a teoremas, pero tal restricción es inocua en la presente discusión.

Teorema 4.1 *Si dos triángulos coplanares $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$, y las rectas A_1A_2, B_1B2 y C_1C_2 se cruzan en el punto O, entonces las intersecciones AB_i, BC_i y AC_i, de los lados correspondientes de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$, —esto es, las intersecciones entre A_1B_1 y A_2B_2, B_1C_1 y B_2C_2, así como A_1C_1 y A_2C_2 respectivamente— son colineales en g (Fing.).*

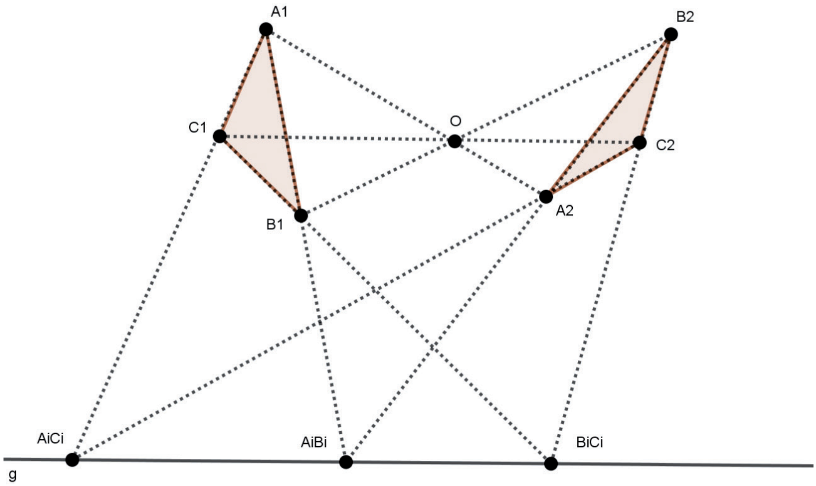

Figura 1. Teorema de Desargues en el plano.

Los autores no desarrollan esta noción pues su interés radica únicamente en mostrar que el teorema de Desargues en el plano admite un contenido informal que lo coloca como un enunciado de la geometría plana (**Teorema 4.1**). Para apreciar la importancia que la consideración 3) tiene en la argumentación de Arana y Mancosu, conviene ir un poco más allá de su planteo e interpretar "intento bienintencionado" de demostrar **4.1** como una *actividad heurística*. A este respecto, hay algunas consideraciones que el agente debería tener presente:

1. Una idea de la estructura lógica del enunciado.
2. El cuidado de tomar en consideración lo enunciado en el antecedente, con el fin de emplear, en su intento de demostración, la *información* allí contenida. Otro tanto ocurre con el sucedente, pero a efectos de reconocer cuándo finaliza la putativa demostración.
3. El cuidado de elaborar, aunque sea de un modo vago, una cierta *estrategia argumental*.

4. La precaución de reflexionar acerca de cómo puede “modularizar” su razonamiento en *pasos inferenciales*, a efectos de verificar si los mismos están lógicamente justificados.

Evidentemente nada impide que un *estudiante* de geometría proyectiva, a quien se le ha presentado la disciplina por medio de proyecciones en el plano de figuras tridimensionales (cosa muy común de hecho), tenga una comprensión ordinaria *espacial* de **4.1**, pero *fracase* en intentos particulares de demostrarlo debido a su falta de pericia (precisamente, se trata de un estudiante). Empleando creencias espaciales el estudiante puede *fallar*, por ejemplo, en visualizar la estrategia consistente en demostrar el caso plano como *corolario* del teorema de Desargues en $\mathbf{R}^3$. Además, incluso atendiendo a esta estrategia el estudiante puede fallar, por ejemplo, en darse cuenta de la conveniencia de que la recta g de la Fig. 2 sea la intersección de los dos planos no paralelos P y P^*. El estudiante también puede no darse cuenta de que el punto O, el centro de proyección, podría verse como el vértice de un tetraedro, donde su base es uno de los triángulos arguianos, mientras el otro lo producimos seccionándolo con un plano, P^*, que intersecta el plano de la base en la recta buscada, g, tal como en la Figura 2.

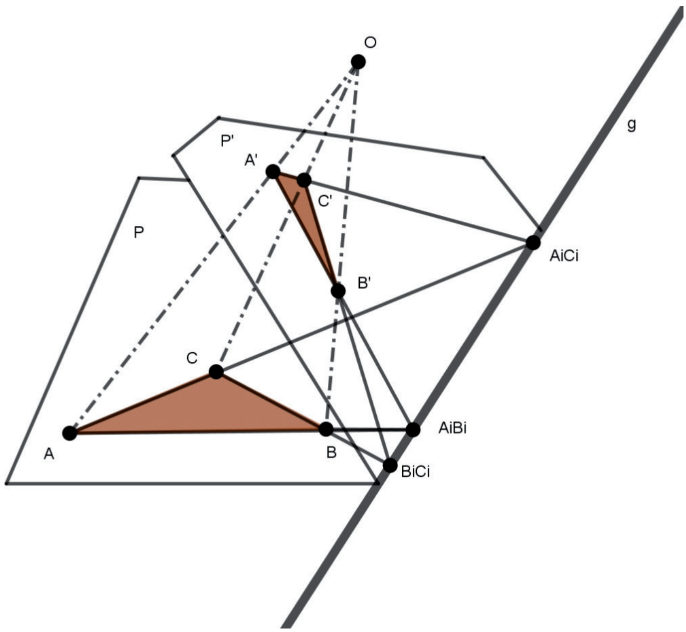

Figura 2. Desargues en 3D (Courant & Robbins, 2002).

Así pues, este agente tendría una comprensión suficiente de **4.1** para intentar demostrarlo, incluso si su habilidad actual le hace *fracasar en sus intentos particulares*.

Por tanto, dada la definición de contenido informal, este agente tiene una "comprensión ordinaria" de **4.1**, pero, al mismo tiempo, nuestro agente tiene creencias, conceptos o compromisos espaciales; luego, el contenido informal de **4.1** sería espacial.

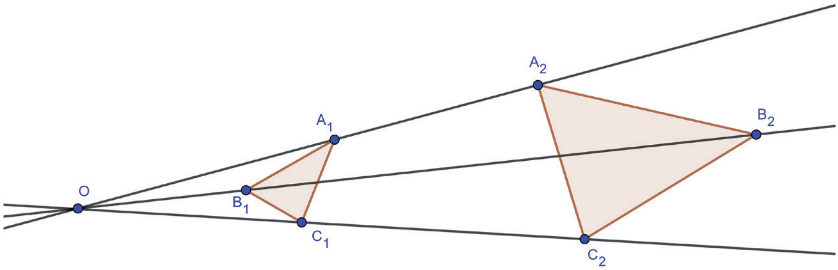

Figura 3

Pasemos a restringir los recursos conceptuales del agente a conceptos de la *geometría plana*, y evaluar si puede tener "intentos bienintencionados" de demostrarlo, en un grado tal que podemos decir que tiene comprensión del teorema, aunque esta sea bastante "básica". Es sencillo apreciar que este es el caso, pues un agente con un entendimiento ordinario (plano) de **4.1**, puede empezar por construir (dibujar) configuraciones arguianas de forma azarosa; en tal caso, siguiendo lo que se indica en el antecedente de **4.1**, podría empezar por situar O y tres rectas incidentes con él, siendo que sobre las mismas inciden los respectivos puntos que constituyen los vértices de ambos triángulos. Esto dará lugar a múltiples configuraciones dependiendo de la posición relativa de los triángulos respecto de O, donde a su vez, y teniendo cuidado al etiquetar los vértices, experimentará buscando los puntos AB_i, BC_i y AC_i, para verificar si puede trazar una recta g (véase los "bosquejos" en Figs. 3 y 4). Así pues, se trata de una actividad de dibujar configuraciones siguiendo las precauciones 1 y 2 de arriba.

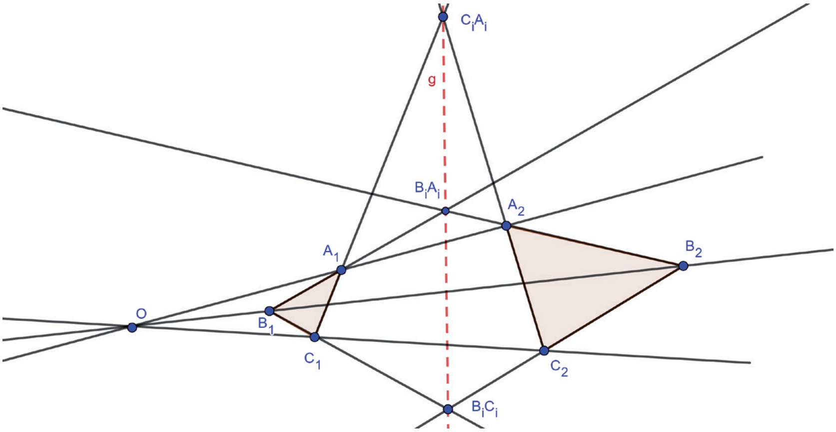

Figura 4

En este punto, nuestro agente conjeturaría que podría demostrar **4.1** indicando, vía construcción sintética y a partir de relaciones de colinealidad e incidencia, cómo obtener la deseada recta *g*, de acuerdo con 3 (cf. Pasch, 2013, p. 74). Él puede empezar a preguntarse, de acuerdo con 4, los "pasos" de la demostración, y su experimentación le puede sugerir que, en algunas configuraciones, las extensiones de los lados correspondientes de los triángulos "parecen" no interceptarse, es decir, serían rectas paralelas. Aquí la restricción introducida habilita distintas alternativas, y en particular, habilita una alternativa euclidiana y otra proyectiva; la primera probablemente hará dudar al agente de la propia formulación, dado que el caso paralelo no está comprendido, pero en el caso proyectivo el agente podrá apelar a su conocimiento ordinario de geometría proyectiva, y pensará que esos puntos (AB_i, BC_i y AC_i) pueden localizarse al infinito (Figura 5). Sin embargo, aún hay un paso crítico: el de deducir la existencia de la recta *g*. En este paso, las dos alternativas mencionadas tienen consecuencias para la *posibilidad lógica* de que el estudiante "pueda" llegar a demostrar **4.1**. En efecto, el teorema es *deducible* en la geometría euclidiana del plano (apelando al teorema de Menelao[22]), pero no lo es en la geometría proyectiva plana, debido a la

[22] El Teorema de Menelao, atribuido tradicionalmente a Menelao de Alejandría, ofrece un criterio para que tres puntos que yacen en los lados de un triángulo, o en sus correspondientes extensiones, sean *colineales*. Así, si ABC es un triángulo, y D, E y F son tres puntos distintos de los vértices, que yacen, respectivamente, en los lados $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, o sobre sus extensiones, entonces $\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{FB}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{AE}|} = -1$.

existencia de planos no arguianos, o "de Moulton" (Figuras 6, 7). En el primer caso los fracasos particulares podrían ser atribuidos a una falta de *habilidad*, pero en el segundo la razón es netamente *lógica*.

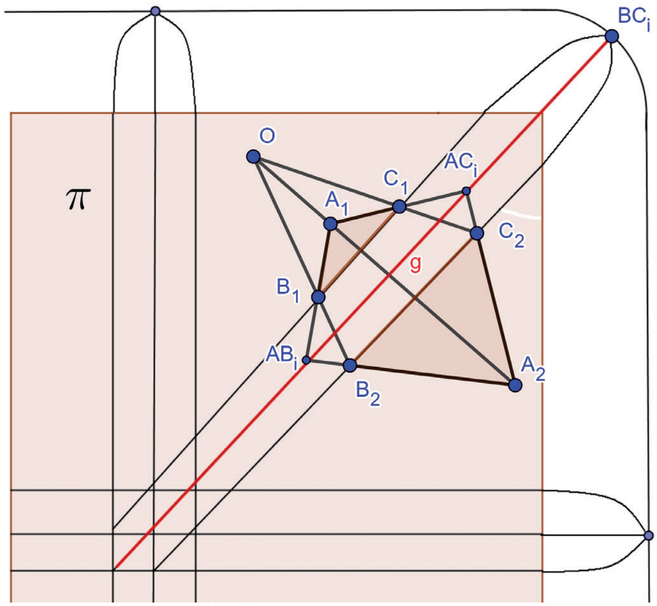

Figura 5. Configuración arguiana con $g \parallel \overline{B_1C_1} \parallel \overline{B_2C_2}$ en el plano π. En el punto al infinito $\overline{BC_i}$ se intersectan $\overline{B_1C_1}$ y $\overline{B_2C_2}$ en g.

En virtud de lo anterior podemos apreciar dos cosas: por un lado, la actividad heurística descrita *contribuye* a la comprensión de **4.1** aun cuando el agente ignore, por ejemplo, el resultado metateórico referido; por otro lado, podemos plantear tres restricciones diferentes para el agente, el cual adscribe al teorema contenidos *ordinarios* distintos:

A. El agente cuenta únicamente con conceptos de la geometría proyectiva del espacio.[23]

[23] En este caso la comprensión garantiza lógicamente que el agente pueda demostrar el teorema (allende su pericia), y el teorema tendría, a pesar de su formulación plana, un contenido espacial (proyectivo) aunque sea de forma "implícita". Téngase en cuenta, sin embargo, que dicho contenido "implícito" no se debe a su conocimiento metateórico, sino al modo en que la disciplina le fue introducida en su educación.

B. El agente cuenta únicamente con conceptos de la geometría proyectiva plana.[24]

C. El agente cuenta únicamente con conceptos de la geometría plana euclidiana, incluyendo los conceptos de proporción y semejanza de triángulos (necesarios para el teorema de Menelao). En tal caso, podría decirse que tiene una comprensión "métrica" de **4.1**.

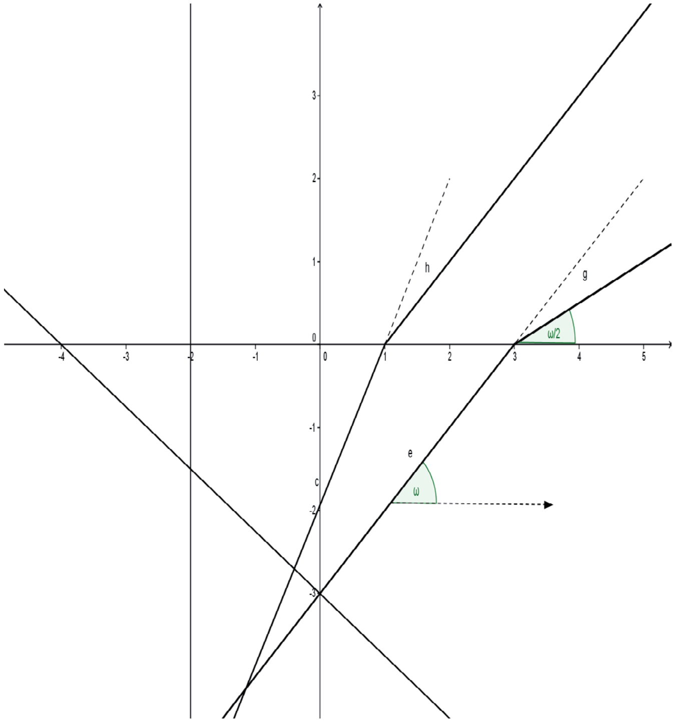

Figura 6. Plano de Moulton. Construimos un nuevo plano sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ modificando las líneas que tienen una pendiente positiva. Definimos las imágenes de la línea $y = m \cdot x + b$ ($m,b \in \mathbb{R}$, m > 0), como $\{(x,y){:}y \leq 0, y = m \cdot x + b\} \cup \{(x,y){:}y > 0, y = \frac{m}{2} \cdot x + b\}$. En otras palabras, se puede decir que las líneas de pendiente positiva se "refractan" en el eje x. En la figura, el grado de inclinación de la recta e, para $y \leq 0$ es ω, mientras que para $y > 0$, es $\frac{\omega}{2}$.

[24] Esta es la restricción a la que apelan Arana y Mancosu para argumentar que **4.1** admite un contenido ordinario completamente plano. Véase Arana y Mancosu (2012, p. 335).

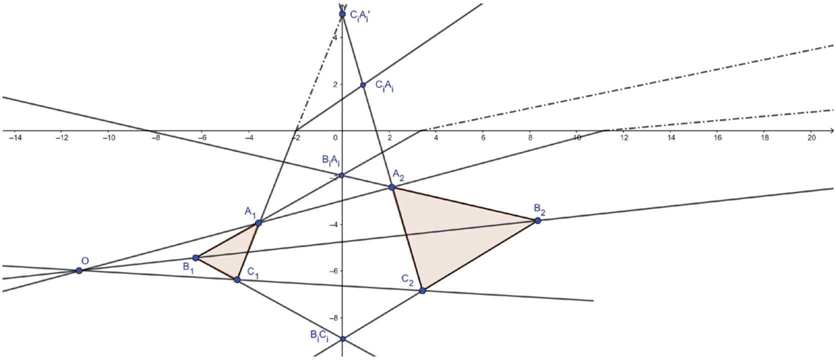

Figura 7. Contraejemplo a **4.1** en un plano de Moulton (configuración de Figura 4).

Estas restricciones califican como "ordinarias" o "informales" en la medida en que no suponen un conocimiento metateórico de **4.1**.[25] Pero lo que en último término interesa aquí es si el agente puede tener alguna comprensión del significado de "pura" (aplicado a demostraciones); esto es, como mínimo, si puede discriminar una demostración pura de una impura. Pues si tal cosa no ocurriese, entonces lo que él comprenda de **4.1** con arreglo a alguna de las restricciones **A. - B.**, no sería un grado de comprensión adecuado para la investigación sobre la pureza de las demostraciones. En efecto: el agente ni siquiera podría figurarse el problema. Para ello se requiere, por un lado, que el agente sea capaz de comprender **4.1** desde diferentes perspectivas, v.g. diferentes restricciones **A.**, **B.**, **C.**, y por otro, que el agente posea alguna creencia respecto a la relación entre esas perspectivas, v.g. las nociones métricas son *independientes* de las proyectivas, o que *no hay* una diferencia categórica entre proyecciones en el plano y en el espacio. Así pues, si toda la comprensión de **4.1** por parte un agente se reduce a **B.**, él no podría entender una demostración espacial (proyectiva) ni "métrica" (euclidiana). Pero aun siendo capaz de entender **4.1** a partir tanto de **B.** como de **C.**, él no podría sancionar una demostración métrica como "impura", si no incorporase a su comprensión de **4.1** la creencia de que las nociones métricas forman parte de un dominio semántico *autónomo* de la geometría proyectiva (plana).

Todo esto conduce a la siguiente conclusión: para que el agente entienda mínimamente el predicado "pura" *necesita* incorporar alguna

[25] Esto sería aceptable para Arana y Mancosu de acuerdo con sus observaciones de la página 335.

creencia acerca de la relación entre los distintos marcos geométricos. En efecto, no podría considerar impura una demostración "métrica", actuando dentro de la restricción **B.**, si no considerase que las nociones "métricas" son *ajenas* a la geometría proyectiva, y tal cosa ocurre en cada una de las alternativas reseñadas en el párrafo anterior. Esto muestra que para hablar de pureza resulta indispensable tener presente la consideración 3) —i.e. "imagen" del mapa de las disciplinas matemáticas, y en particular, de la *autonomía* que cada una de ellas pueda tener—. Con esto no pretendo afirmar que un tipo de creencia así deba ser incorporada dentro de la noción de contenido informal, aunque no sería extraño que un profesor presente la geometría proyectiva diciendo que las proyecciones (centrales) no conservan propiedades "métricas" tales como longitudes o razones. Sin embargo, en su ausencia no podríamos comprender qué quiere decir "demostración métrica", "demostración proyectiva", etc., y tal cosa es indispensable para comprender las atribuciones de pureza a demostraciones. En definitiva, esto muestra la ventaja de la concepción hospitalaria para abordar el desafío semántico (incluso aceptando el concepto de contenido informal) a partir de su respuesta al desafío del valor. Por otra parte, la lectura heurística que he sugerido de *contenido informal* también adquiere un anclaje natural dentro de la perspectiva hospitalaria de pureza; en efecto, al colocar la pureza a nivel de la teoría, según 1), podemos enriquecer la noción de contenido informal atendiendo a otro tipo de actividades que no son intentar demostrar un enunciado (v.g. dibujar configuraciones geométricas), así como aplicarla también a definiciones, técnicas, etc. Finalmente, en consideración de 2) resulta muy natural pensar que el contenido emerge como producto de una actividad heurística.

5. La pureza como virtud o ideal de demostraciones o soluciones

La concepción usual de la pureza aborda el desafío del valor sosteniendo que la pureza es un tipo de *virtud epistémica* de las demostraciones, o un "ideal demostrativo". En esta sección intento mostrar que las propuestas de Detlefsen (2008) y Detlefsen y Arana (2011) al respecto, o bien no logran identificar con claridad cuál sería dicha virtud, o bien lo que proponen sería mejor entendido a la luz de la concepción hospitalaria.

En Detlefsen (2008), se introduce la pureza demostrativa como un *ideal* de las demostraciones que va hasta Aristóteles, pues él

> [...] presentaba la pureza como un ideal. Las pruebas que carecían de ella no eran necesariamente inútiles, pero no proporcionaban el más alto o mejor conocimiento de sus conclusiones. Se trataba, pues, de la más alta cualidad, o de la mejor demostración. (Detlefsen, 2008, p. 179)

Detlefsen identifica este ideal de pureza aristotélico en el requisito de la "exclusión de género" [*metábasis ex allo genos*] que Aristóteles reconoce como un requisito para la elección del término medio de un "silogismo científico" (*An. Pos.*75a29 - 75b12). Así pues, el tipo de conocimiento que ofrecen las demostraciones puras aristotélicas es el conocimiento de la *causa* (Detlefsen, 2008, p. 180). Una dificultad que estas observaciones de Detlefsen parecen tener, es que, de acuerdo con ellas, el ideal aristotélico de pureza *colapsa* con el concepto de "silogismo científico", dado que la virtud de la pureza consiste en proveer el conocimiento de la causa. Es de destacar que, si bien Detlefsen no ignora esto en absoluto, tampoco se advierte una preocupación por *diferenciar* la cientificidad de una demostración, de la pureza. Así mismo, sería imprudente sostener que el requisito de exclusión de géneros conduce, de por sí, a que el término medio del silogismo sea causal, pues este término podría formar parte del *mismo género* que los términos mayor y menor, pero sin involucrar su definición. Por lo tanto, en la lectura que Detlefsen hace del requisito de Aristóteles, esta situación queda indeterminada, pues a la vez que la pureza es identificada con *una* de las condiciones para una demostración "científica" —i.e. la exclusión de géneros— la virtud es identificada por Detlefsen con el tipo de conocimiento que proveen las demostraciones científicas de Aristóteles. Luego, no parecería haber una virtud epistémica *específicamente* "purista".

Por otra parte, al concentrarse únicamente en las *demostraciones*, Detlefsen parece dejar de lado un aspecto fundamental del trasfondo del requisito de exclusión de géneros: el que cada ciencia tenga *su* propio género, y en particular, que no exista una "matemática universal". Claramente, la autonomía que guarden entre sí ciertos géneros del ser resulta fundamental para entender la demanda de la exclusión de géneros. En efecto: la división de las magnitudes en continuas y discretas, es decir, la *autonomía* entre ellas, es lo que claramente motiva la exclusión de géneros; esto queda de manifiesto en el propio ejemplo que Aristóteles introduce para ilustrar el requisito: "las cosas cuyo género es distinto, como la aritmética y la geometría, no es posible que la demostración aritmética se adapte a los accidentes de las magnitudes, si las magnitudes no son números"[26]. En otras palabras: no hay un género *común* a ambas magnitudes. Usualmente se dice que la concepción aristotélica de las *teorías* científicas tiene, en su base, la tesis de que cada ciencia tiene su género propio; así pues, la autonomía entre géneros conduce a una autonomía entre teorías y, en tal contexto, el requisito de exclusión emerge con naturalidad. Así, el énfasis que Detlefsen coloca sobre el conocimiento de la causa parece erróneo en tanto opaca el hecho de que el requisito de exclusión es deudor de una concepción acerca de las *teorías*. Por lo tanto, la lectura de la pureza de acuerdo con la cual la misma es un medio para la construcción de teorías autónomas, parece ser claramente relevante para apreciar un interés purista en Aristóteles.

Este ideal aristotélico, observa Detlefsen, adopta una versión pragmática en la matemática contemporánea. Particularmente en teoría de números, Detlefsen observa, por un lado, que las demostraciones puras pueden asociarse con las demostraciones "elementales"; en sus palabras: "'elemental' [...] significa algo parecido a lo que entendemos por 'tópicamente puro'" (Detlefsen, 2008, p. 190). Por otra parte, la pureza es

> [...] una virtud *pragmática*, aunque sirva a fines epistémicos (a saber, la utilización efectiva del conocimiento para producir más conocimiento). No constituye en sí misma una virtud epistémica; una demostración pura no es, por el mero hecho de su pureza, una mejor justificación del teorema que demuestra. Sin embargo, es un instrumento más eficaz para obtener más conocimientos. Vemos aquí, pues, una sugerencia de la idea de que la pureza aumenta generalmente la eficacia de las divisiones del trabajo epistémico basadas en la especialización. (Detlefsen, 2008, p. 191)

Dos comentarios críticos pueden plantearse respecto a las sugerencias de Detlefsen. El primero es que esta asociación entre "elementariedad" y pureza no parece ser correcto en términos *generales*, es decir, esta distinción entre "elemental" y "avanzado" no parece capturar la distinción entre demostración "pura" e "impura" (cf. los casos presentados en Arana, 2008, §3). Para mostrar que esta asociación sería *errónea*, consideremos dos demostraciones de una proposición extremadamente "elemental".

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[26] *An. Pos.*, I, 7, 75b5. Cf *An. Post.*, I, 10, 76a37 - 40, II, 17, 99a8 - 15, en Aristóteles (1995).

Cualquier estudiante escolar de álgebra puede demostrar esta identidad por exclusiva manipulación simbólica.[27] Así pues, el contenido operativo de (1) se reduce a decir que $a^2+2ab+b^2$ es la "expansión" de $(a+b)^2$. Alternativamente, podemos demostrar "geométricamente": tomamos el segmento de longitud $(a+b)$, y construimos el cuadrado de lado $(a+b)$, –i.e. $(a+b)^2$. Es claro entonces, que el cuadrado puede dividirse en un cuadrado de lado a, un cuadrado de lado b, y dos rectángulos de lados a y b (Fig. 8).

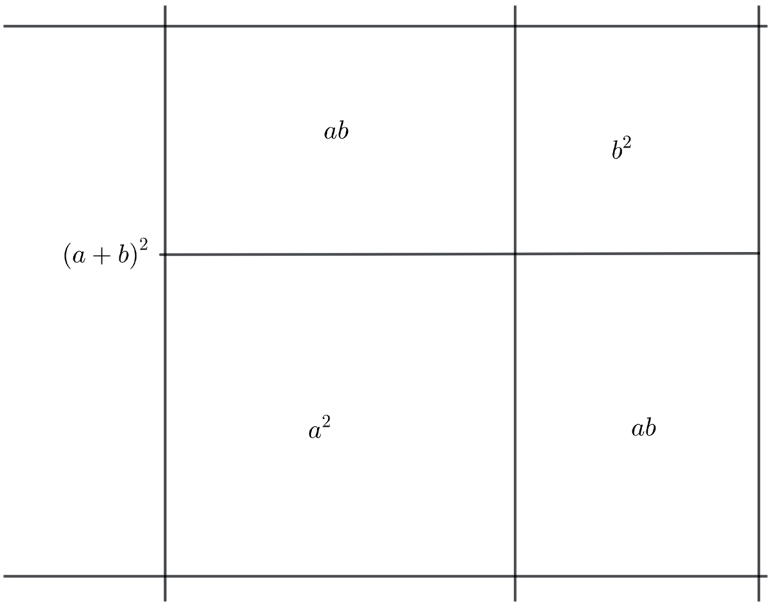

Figura 8. Demostración geométrica de la ecuación (1).

Para un agente que tiene una comprensión operacional de (1), esta demostración geométrica es *impura*. Pero la razón no radica en que el "álgebra geométrica" sea más "avanzada" que el cálculo literal, en un sentido análogo al que la geometría espacial es más "avanzada" que la geometría plana, o la teoría analítica de números lo es con respecto a la teoría elemental. Su impureza radica en que la demostración geométrica introduce un *vínculo* (Ferreirós, 2015, §3.7) entre prácticas matemáticas

[27] El cálculo involucra la conmutatividad del producto, así como la asociatividad de la adición.

bastante elementales de por sí, que está ausente en una comprensión exclusivamente operacional de (1). Es la presencia de tal vínculo lo que la hace impura. Para empezar, a y b devienen en magnitudes (longitudes), por lo que tenemos un vínculo entre una práctica operativa "ciega" y una práctica técnica de medir (véase a este respecto Ferreirós, 2015, §3). De este modo, en este vínculo entre prácticas, opera una interpretación *dimensional* del producto (cuadrado, rectángulo) que no tiene correlato en las operaciones algebraicas. Por último, la representación geométrica de (1) y su demostración, suponen la aceptación de principios sobre magnitudes, tal como la Noción Común 8 de los *Elementos* de Euclides (Heiberg, 1884, p. 11), i.e. el todo es igual a la suma de sus partes, el cual tiene un rol fundamental en la demostración. Sin embargo, y aun cuando haya contextos (como en teoría de números) donde las demostraciones elementales puedan entenderse como demostraciones puras, lo sugerido arriba sobre la ecuación (1) indica que pureza y "elementariedad" no colapsan. Por lo tanto, no sería recomendable tomar estas observaciones de Detlefsen como indicio de una conceptualización más o menos general del valor de los métodos puros en la práctica matemática.

El segundo comentario concierne a la "virtud pragmática" que Detlefsen asocia con las demostraciones elementales. La idea de Detlefsen, de acuerdo con la cual la pureza favorece la división del trabajo por medio de la especialización, parece estar en consonancia con mi sugerencia de relacionar la búsqueda de la pureza con la construcción de teorías autónomas. Sin embargo, él pone el acento en la *eficacia* de las demostraciones puras para *maximizar* los recursos metodológicos para producir conocimiento, i.e. demostrar teoremas; por lo tanto, la pureza es una virtud específicamente de las *demostraciones*, que no está al servicio de la elaboración de teorías, sino al servicio de la eficacia en la obtención de nuevos resultados. En mi opinión, sin embargo, este énfasis en la eficiencia parece artificial; en efecto: la historia de, por ejemplo, la demostración elemental del teorema de los números primos es mucho mejor entendida como guiada por el interés de examinar la *independencia* de un resultado que aparentemente pertenece a un área "elemental" de la teoría de números, respecto del análisis complejo, que entenderla como la búsqueda de mayor eficiencia. Por lo tanto, mi sugerencia acerca de cómo entender las demandas de pureza parece ser más pertinente para entender la práctica matemática que Detlefsen considera que su propia idea de búsqueda de la eficacia.

Por último, consideremos brevemente la propuesta de Detlefsen y Arana (2011), de acuerdo con la cual las soluciones puras proveen un *conocimiento estable*. Lo que esto quiere decir, en pocas palabras, es que la solución perdura como tal, tanto tiempo como el contenido del problema permanezca inalterado. En otras palabras: no podemos rechazar la solución sin que, al mismo tiempo, *disolvamos* el problema (Detlefsen & Arana, 2011, §3). Aquí es más clara la cercanía con la noción de contenido informal: el mismo consiste en el conjunto de “compromisos” (definiciones, axiomas para primitivos, inferencias, etc.) que el agente acepta, y a partir de los cuales *entiende* la formulación del problema (Detlefsen & Arana, 2011, p. 13)[28]. La “estabilidad” sería pues, la *virtud* de las soluciones puras, donde tales soluciones se entienden como “basadas solamente” en el contenido (“compromisos”) del problema. Sin embargo, es difícil decir que por *esta* cualidad epistémica es que las soluciones puras son valoradas en la práctica matemática. Los autores parecen ocuparse de identificar *este* valor como una “preferencia” observable en la *práctica matemática*. En particular, no se advierte una preocupación de vincular la característica “estable” con la sección documental en dicho trabajo (Detlefsen & Arana, 2011, §2), de forma tal que dicha sección aporte evidencia histórica en favor de entender el valor de las soluciones puras en términos de mayor estabilidad.

Haciendo un balance crítico del tratamiento que Detlefsen y Arana han hecho del desafío del valor, podría decirse que los mismos son *aporéticos*, en el sentido lato de que no parecen echar luz sobre la práctica matemática. En efecto, las observaciones de Detlefsen sobre Aristóteles y el papel de las demostraciones elementales se vería enriquecido si localizamos la predicación de pureza al nivel de la teoría, de acuerdo con 1). Por otra parte, en conformidad con 2) resulta que el interés matemático de las demostraciones elementales en teoría de números adquiere un contexto práctico natural cuando, de acuerdo con 3), atendemos a la preocupación por la delimitación (y con esta, la autonomía) del dominio de la teoría elemental de números. Nótese que aquí los resultados de *independencia* se entienden mucho mejor en términos de *fecundidad matemática* que cuando atendemos a cuestiones de eficacia.

6. Conclusiones y perspectivas

En este artículo no he procurado tanto desdeñar la concepción usual de la pureza, sino alentar la adopción de una concepción más hospitalaria que la *incluye*. En este sentido, el lector no tiene por qué apearse de la concepción usual si su interés radica en el estudio de demostraciones o soluciones; pues el punto de adoptar la concepción hospitalaria

[28] Véase Arana y Mancosu (2012, p. 336).

es fundamentar el *valor* de la predicación de pureza de las demostraciones localizando en las teorías el lugar fundamental de la pureza. Luego, el interés en la pureza de las demostraciones, definiciones, técnicas, etc., encontraría su fundamento en el interés por la construcción de teorías autónomas. Así pues, desde el punto de vista práctico, en la investigación que conduce a formar teorías la pureza del método puede emerger como una regla práctica. Por otra parte, y en virtud de la presentación sumamente esquemática de esta nueva concepción, no he pretendido tanto ofrecer evidencia directa en su favor, cuanto mostrar cómo las sugerencias que podemos encontrar en la literatura más destacada sobre la concepción usual pueden enriquecerse cuando se las aprecia desde la concepción hospitalaria.

Debido a la jerarquización del desafío del valor que he planteado, cabe la interrogante acerca de cómo queda planteado el desafío semántico. Un camino para abordar esta interrogante es sostener que las cuestiones semánticas surgen, en la práctica, dentro de la dinámica según la cual el agente asocia un significado o un pensamiento con representaciones, expresiones o lenguajes. El reto, por supuesto, es *cómo* ocurre tal cosa (Ferreirós, 2015, p. 89). Un avance podría consistir en poner en el centro la actividad *heurística*; en efecto, parece muy natural pensar que el contenido cambia con la actividad heurística, y en particular, que nuestra comprensión de proposiciones matemáticas, por ejemplo, es *gradual*. En buena medida, nuestra comprensión parece estar fuertemente asociada con la inserción de un concepto, un teorema, etc., en un "tejido", o una "red" de prácticas matemáticas y, por qué no, una teoría. Podría pensarse entonces, que cuanto más amplia es esta red, *mayor comprensión* ganamos del concepto; es decir, la comprensión y el significado son graduales. Me inclino por decir "gradualidad del significado" en vez de "gradualidad del acceso al significado" por la siguiente razón: lo segundo parecería conducir a sostener que los teoremas tienen un contenido *implícito* que en algún momento es revelado gracias a la investigación; pero en tal caso, cualquier teorema tiene *a priori* una demostración pura que eventualmente será "revelada" por la investigación futura. Esto va contra la *intuición semántica nuclear.*

El carácter dinámico del significado implica que la relación "intrínseco" también lo sea, tanto porque la geografía de las disciplinas cambia, como porque la investigación que conduce a la construcción de una teoría también puede alterar el significado de un concepto o enunciado. Esto es problemático y a la vez muy importante en virtud de que aquí se intersectan dos cuestiones: por un lado, si aceptamos que el contenido *cambia* en el curso de la investigación (la cual por hipótesis está guiada por una norma de pureza), ¿cómo en esa dinámica podemos caracterizar "intrínseco a"? Por otro lado, la investigación es una circunstancia óptima para la *fecundidad* matemática en general y la exploración de *conexiones* entre distintas áreas en particular. Retomando el escepticismo de Kreisel y Cellucci, resulta un verdadero desafío explorar la compatibilidad entre demanda de pureza y fecundidad matemática, entendiendo esta como el hallazgo de conexiones novedosas (y productivas). Pero el punto aquí no debiera ser la mera presencia de "conexiones", sino también la manera en que las mismas se caracterizan; pues sin ir más lejos, la introducción de un sistema de coordenadas en una geometría es un caso claro de vínculo sistemático entre aritmética, álgebra y geometría. Una cuestión "purista" a este respecto es el papel que la noción de *número* desempeña en la coordinalización.

Hilbert, como otros matemáticos influidos por Gauss, consideraban que, epistemológicamente, la noción de número y los procesos recursivos eran "extraños" a la geometría (Hilbert, 1891/2004, pp. 24, 55). Sin embargo, el camino a seguir no consistió en un rechazo a ultranza de los métodos de coordenadas, sino en ensayar métodos para introducir coordenadas "desde dentro" de la geometría. A tales efectos, el método axiomático de Hilbert permitió descubrir y exhibir conexiones internas o estructurales entre teorías matemáticas de muy diversa índole (Giovannini, 2015, p. 193). Así pues, debemos atender a la manera en la que eventuales vínculos son caracterizados en el contexto práctico de las demostraciones que las suponen, pues dicho contexto es relevante para la comprensión que los agentes inscritos en el mismo tienen del teorema. En efecto, si la propuesta de la sección 3 es aceptada, entonces el escepticismo en cuestión empieza a perder peso. En definitiva, creo que el examen realizado en este artículo conduce a reorientar la indagación en torno a la pureza del método, en conexión con la práctica matemática de construcción de teorías autónomas.

Bibliografía

Abrusci, V. M. (1981). 'Proof', 'theory', and 'foundations' in Hilbert's mathematical work from 1885 to 1900. En M. L. Dalla Chiara (Ed.), *Italian studies in the philosophy of science* (pp. 453-491). Springer.

Arana, A. (2008). Logical and semantic purity. *Protosociology*, *25*, 36-48. https://doi.org/10.5840/protosociology2008253

Arana, A. (2014). Purity in arithmetic: Some formal and informal issues. En G. Link (Ed.), *Formalism and beyond. On the nature of* *mathematical discourse* (pp. 315-335). Walter de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9781614518471.315

Arana, A. (2017). On the alleged simplicity of impure proof. En R. Kossak & P. Ording (Eds.), *Simplicity: Ideals of practice in mathematics and the arts* (pp. 205-226). Springer.

Arana, A., & Mancosu, P. (2012). On the relationship between plane and solid geometry. *The Review of Symbolic Logic*, *5*(2), 294-353. https://doi.org/10.1017/S1755020312000020

Aristóteles (1995). *Tratados de lógica (Órganon) II* (M. Candel Sanmartín, introducciones, traducciones y notas, Biblioteca Clásica Gredos, 115). Gredos.

Awodey, S., & Reck, E. H. (2002). Completeness and categoricity. Part I: Nineteenth-century axiomatics to twentieth-century metalogic. *History and Philosophy of Logic*, *23*(1), 1-30.

Baldwin, J. T. (2013). Formalization, primitive concepts, and purity. *The Review of Symbolic Logic*, *6*(1), 87-128. https://doi.org/10.1017/S1755020312000263

Bennett, M. K. (2011). *Affine and projective geometry*. John Wiley & Sons.

Cellucci, C. (2017). *Rethinking knowledge: The heuristic view* (vol. 4). Springer.

Corry, L. (2003). *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Springer Science & Business Media.

Corry, L. (2006). Axiomatics, empiricism, and anshauung in Hilbert's conception of geometry: Between arithmetic and general relativity. En J. Ferreirós & J. Gray (Eds.), *The architecture of modern mathematics* (pp. 133-156). Oxford University Press.

Courant, R. & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. Fondo de Cultura Económica.

Dawson, J. W. (2015). *Why prove it again? Alternative proofs in mathematical practice*. Birkhäuser.

Detlefsen, M. (2008). Purity as an ideal of proof. En P. Mancosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice* (pp. 179-197). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296453.003.0008

Detlefsen, M. & Arana, A. (2011). Purity of methods. *Philosophers' Imprint*, *11*(2), 1-20.

Enriques, F. (1898). *Lezioni di geometria proiettiva*. Nicola Zanichelli.

Ferraro, G., & Panza, M. (2012). Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method. *Archive for History of Exact Sciences*, *66*(2), 95-197.

Ferreirós, J. (2015). *Mathematical knowledge and the interplay of practices*. Princeton University Press.

Ferreirós, J. (2016). Sobre la certeza de la aritmética. En J. Ferreirós & A. Lassalle Casanave (Eds.), *El árbol de los números* (pp. 193-118). Editorial Universidad de Sevilla.

Giovannini, E. N. (2015). *David Hilbert y los fundamentos de la geometría: 1981 - 1905*. College Publications.

Giovannini, E. N. (2016). Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach. *Synthese*, *193*(1), 31-70. https://doi.org/10.1007/s11229-015-0743-z

Giovannini, E. N., Lassalle Casanave, A., & Veloso, P. A. (2017). De la práctica euclidiana a la práctica hilbertiana: Las teorías del área plana. *Revista Portuguesa de Filosofía*, *73*(3/4), 1263-1294.

Hallett, M. (2008). Reflections on the purity of method in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*. En P. Mancosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice* (pp. 198-255). Oxford University Press.

Hartshorne, R. (1967). *Foundations of projective geometry*. W. A. Benjamin.

Heiberg, J. L. (1884). *Euclidis opera omnia* (vol. 1307). BG Teubneri.

Hilbert, D. (1891/2004). Projektive geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry 1891–1902* (vol. I, pp. 21-55). Springer Science & Business Media.

Hilbert, D. (1894). Zwei neue beweise für die zerlegbarkeit der zahlen eines körpers in primideale. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *3*, 59-59.

Hilbert, D. (1896). Ein neuer beweis des kronecker´schen fundamentalsatzes über abelsche zahlkörper. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, *1896*, 29-39.

Hilbert, D. (1899a/2004). Elemente der euklidischen geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry 1891–1902* (vol. I, pp. 302-394). Springer Science & Business Media.

Hilbert, D. (1899b/2004). Grundlagen der euklidischen geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry 1891–1902* (vol. I, pp. 221-286). Springer Science & Business Media, 2004.

Hilbert, D. (1902a). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *8*(10), 437-479.

Hilbert, D. (1902b/2004). Grundlagen der geometrie. En M. Hallett & U. Majer (Eds.), *David Hilbert's lectures on the foundations of* *geometry 1891–1902* (vol. I, pp. 540-602). Springer Science & Business Media.

Hilbert, D. (1971). *Foundations of geometry* (L. Unger, Trad.). Open Court.

Hilbert, D. (1996). El pensamiento axiomático. En C. Álvarez y F. Segura (Eds.), *Fundamentos de las matemáticas* (pp. 23-35). UNAM.

Hilbert, D. (1998). *The theory of algebraic number fields*. Springer Science & Business Media.

Kahle, R., & Pulcini, G. (2018). Towards an operational view of purity. En P. Arazim & Tomáš Lávička (Eds.), *The Logica Yearbook 2017* (pp. 125-138). College Publications.

Klein, F. (1979). *Development of mathematics in the 19th Century: Appendices, "Kleinian mathematics from an advanced standpoint"* (vol. 9). Math Science Press.

Kreisel, G. (1980). Kurt Gödel, 28 April 1906 - 14 January 1978. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, *26*, 148-224.

Lassalle Casanave, A., & Giovannini, E. N. (2021), From magnitudes to geometry and back: De Zolt's Postulate. *Theoria*, *88*(3), 629-652. https://doi.org/10.1111/theo.12385

Lehet, E. (2021). Impurity in contemporary mathematics. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *62*(1), 67-82. https://doi.org/10.1215/00294527-2021-0003

Mancosu, P., & Arana, A. (2015). Plane and solid geometry: A note on purity of methods. En G. Lolli, M. Panza & G. Venturi (Eds.), *From logic to practice* (pp. 23-31). Springer.

Pambuccian, V. (2001). Fragments of euclidean and hyperbolic geometry. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, *53*(2), 361-400.

Pasch, M. (2013). *Vorlesungen über die neuere geometrie: Mit einem anhang von Max Dehn: Die grundlegung der geometrie in historischer entwicklung* (vol. 23). Springer.

Pillay, A. (2021). Remarks on purity of methods. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *62*(1), 193-200. https://doi.org/10.1215/00294527-2021-0008

Prawitz, D. (1971). Ideas and results in proof theory. En J. E. Fenstad (Ed.), *Studies in logic and the foundations of mathematics* (vol. 63, pp. 235-307). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0049-237X(08)70849-8

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(1), 5-41. https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5

Schlimm, D. (2013). Axioms in mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, *21*(1), 37-92. https://doi.org/10.1093/philmat/nks036

Schur, F. (1898). Über den fundamentalsatz der projectiven geometrie. *Mathematische Annalen*, *51*(3), 401-409.

Sieg, W. (2009). Hilbert's proof theory. En D. Gabbay & J. Woods (Eds.), *Handbook of the history of logic: Volume 5. Logic from Russell to Church* (pp. 321-384). Elsevier.

Troelstra, A. (1975). Non-extensional equality. *Fundamenta Mathematicae*, *82*(4), 307- 322. http://eudml.org/doc/214670

Wiener, H. (1890). Ueber grundlagen und aufbau der geometrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *1*, 45-48.

Recibido el 23 de noviembre de 2021; revisado el 21 de abril de 2022; aceptado el 1 de junio de 2022.