PLATONISMO PLENO*

MARK BALAGUER

Tradicionalmente el término "platonismo matemático" ha sido usado para referirse al punto de vista según el cual nuestras teorías matemáticas son acerca de (o más explícitamente, verdaderas de) objetos matemáticos abstractos (es decir, objetos no físicos, no mentales, que existen fuera del espacio y del tiempo). Sin embargo, recientemente los filósofos de la matemática han propuesto unas pocas posiciones que se reconocen más naturalmente como platonistas, pero que no responden a la definición anterior. Más aun, se ha señalado que esta definición no identifica una única posición, es decir, que hay espacio para un cierto grado de ruptura dentro del terreno platonista. En este trabajo, trataré de describir las distintas versiones del platonismo; diré lo que motiva las divisiones dentro del platonismo (es decir, por qué no son triviales las diferencias entre estas distintas perspectivas) y argumentaré que una de estas versiones del platonismo es la mejor, a saber, el *platonismo pleno* que he desarrollado en otro lugar.[1]

1. El argumento epistemológico en contra del platonismo

La razón de que hayan aparecido las distintas versiones del platonismo matemático es bastante simple: hay una objeción muy seria al platonismo –a saber, la objeción epistemológica de Benacerraf[2]– que, según consideran muchos, no puede ser resuelta dentro del platonismo tradicional. La idea que tienen muchos filósofos de la matemática, entonces, es que podemos resolver el problema de Benacerraf, cambiando el punto de vista platonista tradicional.

En pocas palabras, el argumento de Benacerraf es como sigue. De acuerdo con el platonismo, nuestro conocimiento matemático es conocimiento de una colección de objetos que existen fuera del espacio y del tiempo. Pero no pode-

* Un conjunto de personas han leído parte del material de este artículo en diferentes formas y ofrecieron sugerencias provechosas. Ello incluye a Arnold Koslow, Hartry Field, Jerrold Katz, Michael Resnik, Elliot Mendelson, Charles Landesman, Stephen Schiffer, Adam Vinueza, David Pitt, Jody Azzouni, David MacCallum, Colin McLarty, Tom Slaughter, Henry Mendell, Seth Crook y Stuart Cornwell. Me gustaría expresar mi gratitud a todas estas personas y a la City University de Nueva York, que respaldó gran parte de la investigación de este artículo otorgándome una beca.

1 Balaguer (próximo a aparecer[1]).

2 Benacerraf (1973).

mos tener tal conocimiento. Por lo tanto, el platonismo es falso. La premisa central aquí es, por supuesto, la segunda, *i. e.* la pretensión de que los seres humanos no pueden obtener conocimiento de objetos que existen fuera del espacio y del tiempo. El argumento a favor de esta pretensión es obvio: existimos dentro del espacio-tiempo y no tenemos medios de adquirir información acerca de algo que esté fuera del espacio-tiempo. Nuestras únicas fuentes últimas de conocimiento son la percepción y la introspección, pero ninguna de ellas es capaz de proporcionarnos información acerca de objetos abstractos; así, no podemos adquirir ninguna información tal. Para decirlo en una oración: aunque *haya* números, conjuntos y funciones existentes en algún reino platónico, no hay modo de que podamos saber cómo son tales objetos y por tanto no podemos interpretar nuestro conocimiento matemático como conocimiento de tales objetos.[3] Hartry Field ha expresado este punto de la siguiente manera:

> Pero las "relaciones de confiabilidad" especiales entre el reino matemático y los estados de creencia de los matemáticos parecen muy difíciles de deglutir. Es más bien como si alguien pretendiera que sus estados de creencia acerca de sucesos familiares en un remoto pueblo en Nepal fueran casi todas verdaderas sin comillas, a pesar de la ausencia de algún mecanismo para explicar la correlación entre aquellos estados de creencia y los sucesos en el pueblo.[4]

Ahora bien, el argumento epistemológico de Benacerraf no *establece* que el platonismo sea falso. Lo que *realmente* establece, sin embargo, es que los platonistas necesitan una epistemología, es decir, que no podemos aceptar sus puntos de vista hasta que no aclaren el misterio epistemológico que rodea su perspectiva, esto es, hasta que expliquen cómo pueden los seres humanos adquirir el conocimiento de objetos matemáticos abstractos.

La mayoría de los platonistas tradicionales ha tratado de resolver este problema mediante la adopción de alguna versión del punto de vista de que los seres humanos poseen una facultad extrasensorial de *intuición matemática* que nos proporciona algún tipo de "contacto" con objetos matemáticos abstractos. Platón pensó que, antes de nacer, estuvimos "en" el reino matemático, por decir así, que tuvimos algo similar a una "experiencia de primera mano"

[3] Se podría pensar que los platonistas simplemente podrían apelar a una *prueba* aquí. Esto es, se podría pensar que podemos obtener conocimiento de los objetos matemáticos probando cosas acerca de ellos. Pero este razonamiento es circular, porque las pruebas descansan en un conocimiento anterior de los objetos matemáticos. Esto es, las pruebas sólo engendran conocimiento si ya tenemos conocimiento de los axiomas en los que están basadas las pruebas

[4] Field (1989), pp. 26-27.

con los objetos matemáticos, y que todo nuestro conocimiento matemático surge vía la reminiscencia. Frege habló de "una capacidad mental peculiar, el poder del pensamiento" que nos permite "captar" o "aprehender" los objetos abstractos. Y Gödel habló de "algo similar a una percepción de" los objetos matemáticos.[5] Pero en años recientes, todo este discurso ha parecido más y más misterioso. En particular, parece que si seguimos la dirección de estos platonistas tradicionales, tenemos que adoptar una filosofía de la mente no naturalista. Realmente, parecemos estar forzados a aceptar alguna clase de dualismo cartesiano, de acuerdo con el cual la mente es una entidad no material que existe fuera del espacio y del tiempo: porque sin este supuesto no parece posible que la mente pueda lograr el tipo necesario de "contacto" con los objetos abstractos. Así, en la medida en que la mayoría de los filósofos sean renuentes a aceptar esta clase de no naturalismo con respecto al cerebro-mente humano, también serán renuentes a aceptar la epistemología de Platón-Frege-Gödel.[6]

Este es el punto al que han llegado los platonistas contemporáneos. Han buscado preservar la interpretación platonista de la matemática sin adquirir una filosofía de la mente cartesiana implausible que vaya en contra de los puntos de vista contemporáneos acerca de la mente-cerebro. Una perspectiva tal, sugerida por Quine y desarrollada por Mark Steiner, está basada en el holismo.[7] Puesto que nuestras teorías matemáticas juegan un rol central en nuestra imagen científica completa del mundo (es decir, en nuestra "red de creencias") ellas están justificadas conjuntamente con el resto de nuestro punto de vista científico. En otras palabras, el punto de vista aquí es que la confirmación es holista; nuestra teoría completa del mundo está confirmada como una totalidad; así, cualquier confirmación de nuestra perspectiva global científica es una confirmación de nuestras teorías matemáticas.

Hay un problema muy serio con este tipo de epistemología: deja sin explicar nuestro conocimiento de las teorías matemáticas previo a sus aplicaciones. Cuando aplicamos una teoría matemática en la ciencia empírica por primera vez, usualmente ya sabemos que es verdadera; ésta es la razón por la que nos sentimos cómodos al aplicarla. Los matemáticos no tienen que esperar a ver

[5] Véase *Menón* y *Fedón* de Platón; véase Frege (1919), p. 530 y véase Gödel (1964), pp. 483-484.

[6] Cabe destacar que hay otro problema con esta epistemología. Aun si la mente humana es una entidad inmaterial, no está claro que esto resuelva el problema. Tenemos tres categorías aquí, a saber, la física, la mental y la abstracta. Si es un misterio cómo puede ser transmitida la información acerca de cosas abstractas como números a cosas físicas como los cerebros, ¿por qué no es un misterio cómo podría ser transmitida tal información a cosas mentales como las mentes?

[7] Véase, por ejemplo, la sección 6 de Quine (1951) y el capítulo 4 de Steiner (1975).

cómo les va a sus teorías en las aplicaciones, para luego aceptarlas; las aceptan independientemente de las aplicaciones; así, una apelación a las aplicaciones no describe cómo adquirimos el conocimiento matemático. Otra manera de evaluar el mismo punto es advertir que si la epistemología Quine-Steiner fuera correcta, entonces el hecho de que casi todas nuestras teorías matemáticas resultan ser verdaderas sería un milagro; esperaríamos que la mayoría de ellas resulten falsas, porque el proceso de construcción de una teoría matemática sería un proceso de eliminación en el que solamente podríamos controlar nuestro trabajo aplicándolo.

2. Algunas modificaciones en la perspectiva platonista

Con el fracaso de la epistemología de Quine-Steiner, muchos platonistas han buscado resolver el problema de Benacerraf abandonando la formulación tradicional del platonismo, es decir, adoptando una perspectiva que pudiera ser más compatible con el desarrollo de una epistemología aceptable de la matemática. Una perspectiva tal puede ser denominada *platonismo naturalizado*; su autora original es Penélope Maddy.[8] La estrategia de Maddy es traer de vuelta los objetos matemáticos al espacio-tiempo y, de ahí, al alcance de nuestras facultades perceptuales. Ella se concentra en la teoría de conjuntos; su pretensión es que la teoría de conjuntos puede ser interpretada como siendo una teoría acerca de conjuntos de objetos físicos ordinarios, tales como guijarros o bizcochos, y que tales conjuntos pueden ser considerados como localizados en el espacio-tiempo y perceptibles.

Una reacción inmediata al punto de vista de Maddy es que no es en absoluto una versión genuina del platonismo. En verdad, se podría pensar que es esencialmente equivalente al punto de vista de Mill, según el cual la matemática es una ciencia empírica y física. Si esto fuera correcto, sería una crítica devastadora, no simplemente porque en la actualidad estamos buscando una epistemología para el platonismo, sino también porque el punto de vista de Mill es extremadamente implausible –hay varias objeciones a él, bien conocidas, que no pueden ser evitadas, según acuerda la mayor parte de la gente–.[9] Pero la pretensión de que Maddy no es realmente platonista está equivocada: si bien los conjuntos de Maddy están localizados en el espacio-tiempo, sin embargo son abstractos. Esto puede verse del siguiente modo. Para Maddy, cada grupo de objetos físicos está asociado con infinitamente

[8] Maddy (1990).

[9] Mill desarrolla su punto de vista en su obra de 1843, libro II, capítulos 5 y 6. Para algunas objeciones a esta perspectiva, véase Frege (1884), secciones 7-10.

muchos conjuntos. Los tres huevos en mi heladera, por ejemplo, están asociados con el conjunto que contiene esos huevos, el conjunto que contiene al conjunto que contiene esos huevos, y así sucesivamente, toda la jerarquía; más aun, también están asociados con conjuntos más complicados, por ejemplo, el par que contiene el conjunto que contiene los tres huevos y el conjunto que contiene al conjunto que contiene los huevos. Ahora bien, todos estos conjuntos tienen la misma ubicación espacio-temporal y están hechos de la misma materia. Así, las diferencias entre ellos deben ser, en algún sentido, abstractas. En particular, Maddy piensa que los conjuntos son abstractos, a pesar de la circunstancia de que están hechos de materia, porque están *estructurados* de modos muy peculiares.

En otro lugar he discutido extensamente que el punto de vista de Maddy es inaceptable.[10] Fundamentalmente, señalo que mientras su perspectiva de hecho evita *algunas* de las objeciones tradicionales al punto de vista de Mill, no las evita a todas. Por ejemplo, un problema que persiste en su perspectiva, es que nos compromete con la consideración de las leyes de la matemática como leyes de la naturaleza, contingentes y falsables, en la misma clase que las leyes de la física; pero esto parece implausible.

Pero más importante aun, he argumentado que aun si Maddy pudiera resolver todas las objeciones que invadieron el punto de vista de Mill, la perspectiva de ella *no resuelve la objeción de Benacerraf*. Su estrategia completa para resolver este problema es adoptar una concepción de los conjuntos de acuerdo con la cual ellos son perceptibles. Sin embargo, argumento que sus conjuntos no son perceptibles. Comienzo por preguntar si podemos o no percibir la diferencia estructural entre un agregado de materia física y un conjunto. Esto es, cuando miro en mi heladera, ¿puedo ver el agregado de estofa física que constituyen los tres huevos y el conjunto que contiene estos huevos? La respuesta es "no". Puesto que el conjunto y el agregado están hechos del mismo material, ambos conducen a la misma estimulación retiniana; Maddy admite esto.[11] Pero si recibimos sólo una estimulación retiniana, entonces los datos perceptuales acerca del conjunto son idénticos a los datos perceptuales acerca del agregado. Así no podemos percibir la diferencia entre el agregado y el conjunto.[12] Pero puesto que es muy obvio que *podemos* percibir el agregado y puesto que hay una diferencia entre el agregado y el conjunto, se sigue que no podemos percibir el conjunto.

[10] Balaguer (próximo a aparecer[2]).

[11] Maddy (1990), p. 65.

[12] Chihara ha dado un argumento diferente a favor de la misma conclusión. Véase su libro (1990), pp. 202-204.

Seguiré argumentando a partir de aquí que es precisamente el carácter abstracto de los conjuntos de Maddy lo que nos prohíbe percibirlos; esto es, Maddy sólo podría resolver este problema adoptando una concepción de los conjuntos según la cual ellos son objetos concretos ordinarios; pero tan pronto ella haga esto, abandona completamente el platonismo y colapsa en la implausible filosofía de las matemáticas milliana. Mi conclusión es que no hay concepción de los conjuntos según la cual sean a la vez perceptibles *y* abstractos y que, por lo tanto, toda la estrategia de Maddy para responder al problema epistemológico de Benacerraf está condenada al fracaso.[13]

Una segunda manera en la que los platonistas han tratado de revisar la formulación tradicional de su punto de vista es la de admitir, en contra de Maddy, que la matemática es acerca de algo que existe fuera del espacio-tiempo, pero negando que sea acerca de *objetos*. La posición aquí es conocida como *estructuralismo*. Este es el punto de vista según el cual nuestras teorías matemáticas son descripciones de ciertas *estructuras* abstractas, o *esquemas* [patterns].[14] Por ejemplo, la aritmética es considerada como el estudio de la estructura abstracta (o "molde sin objetos") que está caracterizada por los axiomas de Peano. Esta estructura contiene una sucesión infinita de *posiciones*, o portadores de lugar; cualquièr sucesión infinita de objetos puede "llenar" estas posiciones y, así, "actuar" como los números; pero la aritmética, de acuerdo con el estructuralismo, no se ocupa de ninguna de estas sucesiones de objetos, se ocupa, más bien, de la estructura o el esquema que todas ellas comparten.[15] Así, según el estructuralismo, no hay ningún *objeto* que sea el 3; hay sólo la cuarta posición en la estructura de los números naturales. (La razón de que el estructuralismo sea aún una versión del platonismo es que las estructuras matemáticas son consideradas cosas reales y objetivas que existen fuera del espacio y el tiempo.)[16]

¿Cómo se supone que el estructuralismo contribuye a resolver el problema epistemológico del platonismo? Bien, la idea es como sigue. Claramente somos capaces de advertir la presencia de esquemas, esto es, el conocimiento de esquemas. Pero, según el estructuralismo, el conocimiento matemático *es* justamente el conocimiento de esquemas; así, en esta perspectiva no hay ningún problema con nuestro conocimiento matemático.

[13] Doy una versión mucho más completa del argumento anterior en mi obra (próxima a aparecer[2]) y considero varias respuestas maddianas al argumento.

[14] Dedekind (1888) parecía sostener este punto de vista. Ha sido desarrollado recientemente por Resnik (1981) y Shapiro (1989). La terminología de "esquemas" se debe a Resnik.

[15] Otra manera de afirmar esto es que la aritmética no se ocupa de las propiedades *intrínsecas* de los objetos, que sólo se ocupa de las relaciones que valen *entre* objetos.

[16] Debería notar aquí que *hay* estructuralistas antiplatonistas, por ejemplo, Benacerraf (1965) y Hellman (1989).

Este argumento es falaz. Ciertamente somos capaces de adquirir conocimiento que puede ser vagamente descrito como "conocimiento de esquemas", pero no está claro que este conocimiento sea conocimiento de objetos abstractos, porque puede haber una descripción antiplatonista de este tipo de conocimiento. Mi punto aquí puede aclararse bien señalando que los platonistas de objetos pueden usar un análogo al argumento estructuralista. Podrían pretender que puesto que es claro que tenemos conocimiento matemático, y puesto que el conocimiento matemático es *justamente* conocimiento de objetos abstractos, no hay problema con el conocimiento de objetos abstractos. Pero este argumento *obviamente* no es aceptable; el desafío para los platonistas es el dar cuenta de cómo el conocimiento matemático que *obviamente* tenemos pueda ser conocimiento de objetos que existen fuera del espacio-tiempo. Este problema no desaparece si se describe el conocimiento en cuestión como 'conocimiento de esquemas'; porque hay tantos motivos para pensar que el conocimiento de esquemas puede ser interpretado antiplatonísticamente como los hay para pensar que el conocimiento matemático puede ser interpretado antiplatonísticamente.

3. La solución

Me parece que los platonistas deben aceptar la pretensión tradicional de que la matemática es acerca de objetos abstractos. Pero esta pretensión tradicional *no* recoge una *única* perspectiva. Más aun, pretendo que el punto de vista que los platonistas deben adoptar *no* es el que la mayoría de los platonistas tradicionales ha aceptado. Pienso que el punto de vista tradicional es refutado por el argumento de Benacerraf. Pero hay otra versión del platonismo que no es refutado de ese modo.

La perspectiva que tengo *in mente* es un *platonismo pleno*, o PP, que he desarrollado en otro lugar.[17] El PP puede expresarse muy intuitivamente (pero también muy descuidadamente) como el punto de vista de que existe todo objeto matemático posible. Para dar una formulación más precisa de esta perspectiva, necesitamos liberarnos de la modalidad *de re*; de este modo, podríamos decir que el PP es el punto de vista de que hay objetos matemáticos y que estos objetos agotan todas las posibilidades o, quizá, que existen objetos matemáticos de todas clases.[18] (Por razones retóricas, a menudo usaré la primera formulación del PP a pesar de su imprecisión.)

[17] Balaguer (próximo a aparecer[1]).

[18] Si deseamos expresar formalmente el PP, esto se hace más intuitivamente en una lógica de segundo orden. Sea que "Mx" significa "x es un objeto matemático" y sea x una variable de primer orden e Y una variable de segundo orden, podemos expresar el PP como sigue: (Ex)(Mx) & (Y) [(Ex)(Mx & Yx) $\rightarrow$ (Ex)(Mx & Yx)]. Ahora bien, el signo aquí tiene que ser leído como posibilidad lógica; así, con el supuesto de que la existencia de los objetos matemáticos es lógicamente posible, podríamos liberarnos de la cláusula existencial, porque estará implicada por la cláusula principal.

La ventaja del PP es que elimina el misterio de cómo los seres humanos pudimos obtener conocimiento de los objetos matemáticos abstractos. Porque si el PP es correcto, entonces todo lo que tenemos que hacer para obtener tal conocimiento es conceptualizar, o pensar acerca, o aun "inventar" un objeto matemático. Cualquiera sea aquél, en tanto sea consistente, habremos formado una representación segura de *algún* objeto matemático, porque, de acuerdo con el PP, existen todos los objetos matemáticos posibles. Puedo formular esto como una respuesta directa al argumento de Field sobre la ciudad de Nepal. Admito que no puedo tener conocimiento de una ciudad nepalesa sin algún acceso a ella. Pero si existen todas las ciudades nepalesas posibles, *podría* tener conocimiento de esas ciudades, aun sin ningún acceso a ellas. Para obtener tal conocimiento, meramente tendría que inventar una ciudad nepalesa posible. Porque, bajo el supuesto de que existen todas las ciudades nepalesas posibles, se seguiría que la ciudad que he imaginado existe y que mis creencias acerca de esta ciudad se corresponden con los hechos sobre ella. Ahora bien, por supuesto no es el caso de que todas las ciudades nepalesas posibles existan y por tanto no podemos obtener conocimiento de tales ciudades de este modo. Pero de acuerdo con el PP, todos los posibles objetos matemáticos de hecho existen. Por lo tanto, si adoptamos el PP, somos libres también de adoptar este tipo de epistemología para los objetos matemáticos.

Debería quedar claro que el PP difiere del punto de vista platonista tradicional. Desde la perspectiva tradicional, hay, por ejemplo, *una* jerarquía de teorías de conjuntos y, por ejemplo, la hipótesis del continuo (HC) es o verdadera o falsa en esa jerarquía. De acuerdo con el PP, sin embargo, hay *muchas* jerarquías de teorías de conjuntos; en algunas, HC es verdadera y en otras HC es falsa. Pero la diferencia más importante entre el PP y el platonismo tradicional es que, de acuerdo con el PP, *toda teoría puramente matemática consistente describe con verdad alguna parte del reino matemático.* Por supuesto, es este rasgo del PP el que lo hace epistemológicamente aceptable; porque dado esto, se sigue que el conocimiento de la consistencia matemática es suficiente para el conocimiento del reino matemático.[19]

[19] El PP y la epistemología asociada son originales. Sin embargo, la perspectiva aquí está relacionada con la de Michael Resnik que parece explicar (1982, p. 101) que el conocimiento de la consistencia matemática es suficiente para el conocimiento de las estructuras matemáticas efectivas. La diferencia entre mi punto de vista y el de Resnik es que él no provoca esta explicación para adoptar el PP. Yo no conozco otro modo de provocarla, sin embargo, por lo que es razonable suponer que, a pesar del hecho de que Resnik no *formula* su punto de vista como una versión del PP, es, pese a todo, una versión del PP.

Es también digno de notar que mi epistemología mantiene alguna relación con la de Jerrold Katz (1981, capítulo VI) y David Lewis (1986, sección 2.4). La posición de ellos es que, puesto que las verdades matemáticas son *necesariamente* verdaderas, simplemente no necesitamos ningún

Ahora bien, a pesar de la simplicidad de la posición fundamental expuesta aquí, el argumento que uso para mostrar que esta posición proporciona una adecuada refutación del argumento epistemológico en contra del platonismo es bastante larga y complicada. No expondré aquí el argumento, pero en otro lugar presento el argumento de modo completo.[20] La parte más importante de mi argumento es la consideración de varias objeciones. Examinaré ligeramente aquí la más importante de ellas pero mis consideraciones serán muy breves.

La primera objeción puede resumirse como sigue. "Aun si el PP fuera correcto y el conocimiento de la consistencia matemática fuera suficiente para el conocimiento del ámbito matemático, usted todavía no habría refutado el argumento de Benacerraf, porque no ha explicado cómo pueden obtener los seres humanos conocimiento de la consistencia matemática."

Hay dos razones de por qué no he explicado cómo los seres humanos pueden obtener conocimiento de la consistencia de nuestras teorías matemáticas. La primera es que los platonistas no pueden dar ninguna explicación de tal conocimiento que no puedan dar los antiplatonistas. En otras palabras, si los antiplatonistas pueden dar cuenta del conocimiento de la consistencia, entonces los platonistas también pueden, porque simplemente *piden prestada* la explicación antiplatonista. Ahora bien, por supuesto esto no es *generalmente* verdadero; los platonistas no pueden siempre usar las explicaciones antiplatonistas del conocimiento matemático, porque los dos grupos de filósofos tienen diferentes concepciones de lo que es el conocimiento matemático; los platonistas piensan que tal conocimiento es acerca de objetos matemáticos y los antiplatonistas que no lo es. Pero esta situación cambia en el caso especial de nuestro conocimiento de la consistencia matemática: no hay nada que impida a los platonistas comprender la consistencia tan precisamente como lo hacen los antiplatonista. Así, no hay nada que les impida explicar el conocimiento de la consistencia tan precisamente como lo hacen los antiplatonistas. La conclusión de este argumento, entonces, es que la objeción de Benacerraf a los platonistas no puede estar basada en la pretensión de que ellos no pueden explicar el conocimiento de la consistencia matemática.

---

contacto con los objetos de esas verdades para lograr conocimiento de ellas. He argumentado en otro lugar (en preparación, capítulo 5) que esta epistemología sólo funciona para el PP y no para otras versiones del platonismo. Así la apelación a la necesidad no es necesaria, porque se puede dar una epistemología al PP sin mencionar la necesidad. Más aun –y también argumento esto en mi obra (en preparación)– la apelación a la necesidad realmente *crea* problemas al platonista; esto es, hay problemas independientes con la apelación a la necesidad.

[20] Balaguer (próximo a aparecer[1]).

La segunda razón de por qué no necesito dirigirme a la objeción anterior es, pienso, más fundamental que la primera. Por supuesto, *explica* la primera. La segunda razón es justo ésta: en general –ya estemos hablando de objetos matemáticos o físicos– no necesitamos ningún acceso a (esto es, contacto con) un conjunto de objetos para saber si un conjunto de oraciones acerca de esos objetos es o no consistente. La razón de que esto sea tan importante es que la fuerza completa del argumento epistemológico en contra del platonismo se deriva del hecho de que, al menos *prima facie*, parece que –en general– uno realmente necesita un contacto con un objeto para lograr conocimiento de él; es por esto que la falta de contacto con los objetos matemáticos fue una fuente de alarma. Pero si solamente estamos interesados en el conocimiento de la *consistencia*, no hay necesidad para estar alarmados; porque el conocimiento de la consistencia de un conjunto de oraciones *no* depende de tener acceso a los objetos acerca de los cuales se formulan las oraciones y, por lo tanto, los platonistas no tendrán más dificultad que los antiplatonistas para explicar nuestro conocimiento de la consistencia matemática.

Puedo apoyar mi pretensión de que el conocimiento de la consistencia no depende del acceso, mediante la mera consideración de ejemplos. No necesito acceder al séptimo niño nacido en 1991 para saber que las oraciones que afirman que es una mujer y es italiana son consistentes entre sí: del mismo modo, no necesito acceder a este niño para saber que las oraciones que afirman que es un varón y que no lo es, son inconsistentes. Lo mismo es verdadero de las oraciones matemáticas. No necesito ningún acceso al número 4 para saber que "4 es par" y "4 es positivo" son consistentes o que "4 es impar" y "4 no es impar" son inconsistentes.

(Otra manera de apreciar el hecho de que el conocimiento de la consistencia no es problemático en relación con esto es reconocer que tal conocimiento es conocimiento *lógico*. La belleza cabal del PP yace en el hecho de que si es correcto, el conocimiento matemático surge del conocimiento lógico. Los platonistas que no aceptan el PP no pueden tener esta pretensión, porque tienen que explicar cómo alguien puede saber cuáles de nuestras teorías matemáticas consistentes son verdaderas y cuáles no lo son, y esto podría no ser conocimiento lógico. Pero los platonistas plenos no tiene que explicar este tipo de conocimiento, porque de acuerdo con ellos, *todas* nuestras teorías puramente matemáticas consistentes son verdaderas de alguna parte del reino matemático. Todo esto, por supuesto, tiene reminiscencia de la perspectiva de Field; él argumenta que los antiplatonistas pueden considerar el conocimiento matemático como conocimiento lógico.[21] Si estoy en lo cierto, entonces los

[21] Field (1989), ensayo 3.

platonistas plenos pueden hacer lo mismo. Y esto no los compromete con el logicismo más que lo que la perspectiva de Field lo compromete *a él* con el logicismo. La verdad matemática no es verdad lógica, porque las alegaciones de existencia de la matemática no son lógicamente verdaderas.)

La segunda objeción a mi punto de vista, que consideraré, puede ser resumida como sigue. "Todo lo que usted realmente ha explicado es cómo es que los seres humanos pueden *encontrar por casualidad* teorías que verdaderamente describen el reino matemático. En la descripción que nos ha dado, la comunidad matemática acepta una teoría matemática T por una lista de razones, una de las cuales es que T es consistente (o más precisamente, que los matemáticos creen que T es consistente). Entonces, puesto que el PP es verdadero, resulta que T verdaderamente describe parte del reino matemático (porque *todas* las teorías puramente matemáticas consistentes lo hacen). Pero puesto que los matemáticos no tienen ninguna concepción del PP, ellos no saben *por qué* T verdaderamente describe el reino matemático, y por tanto el hecho de que lo *haga* es, en algún sentido, azaroso."

El problema con esta objeción a mi epistemología es que (a) exige una explicación *internalista* de nuestro conocimiento matemático (es decir, una explicación internalista de la confiabilidad de nuestras creencias matemáticas) pero (b) para ir al encuentro del desafío epistemológico de Benacerraf, los platonistas sólo necesitan proporcionar una explicación *externalista* de la confiabilidad de nuestras creencias matemáticas. Para dar una explicación externalista de la confiabilidad de las creencias de S, meramente se tiene que explicar por qué los métodos de S para adquirir creencias son, *de hecho*, confiables; pero para dar una explicación internalista de la confiabilidad de las creencias de S, se debe hacer más: se debe también explicar cómo S sabe (o confiablemente cree) que sus métodos de adquisición de creencias son confiables. En otras palabras, para dar una explicación internalista, se debe proporcionar una explicación E de la confiabilidad de las creencias de S por las cuales podemos *también* explicar cómo S puede confiablemente creer que E es verdadera.

Mi explicación platonista plena de la confiabilidad de nuestras creencias matemáticas es externalista: explico esta confiabilidad señalando que (a) usamos nuestro conocimiento de la consistencia de las teorías puramente matemáticas al fijar nuestras creencias puramente matemáticas y (b) bajo el supuesto de que el PP es verdadero, cualquier método para fijar una creencia puramente matemática que esté así limitado por el conocimiento de la consistencia es, *de hecho*, confiable (es decir, cualquier sistema de creencias puramente matemáticas que sea consistente verdaderamente describirá, de hecho, parte del reino matemático). No pretendo que los conocedores matemáticos reales puedan justificar el PP o aun que tengan alguna concepción del PP. Así, lo que necesito argumentar, para bloquear la objeción anterior, es que no *necesito* conocedores matemáticos para tener alguna concepción del PP, es decir, que no necesito una explicación internalista del conocimiento matemático para refutar la objeción de Benacerraf al platonismo.

Me parece *obvio* que los platonistas solamente necesitan una explicación externalista del conocimiento matemático. Puedo apreciar esto reflexionando sobre el tipo de desafío epistemológico que Benacerraf está intentando presentar, y ubicando el análogo empírico del desafío de Benacerraf, es decir, el desafío análogo de nuestra capacidad para lograr conocimiento empírico acerca de los objetos físicos ordinarios. De acuerdo con ambos, Field y Benacerraf –y pienso que tienen razón en este punto– es *fácil* resolver el análogo empírico del desafío de Benacerraf: podemos hacerlo así apelando meramente a la percepción sensible. Pero esto significa que Field y Benacerraf están meramente exigiendo una explicación externalista del conocimiento matemático, porque una apelación a la percepción sensible sólo puede proporcionar una explicación externalista de nuestro conocimiento empírico; no puede proporcionar una explicación internalista. Aquellos que creen que hay un mundo externo del tipo que hace surgir percepciones sensibles seguras (los CME-istas), pueden dar una explicación externalista de nuestro conocimiento empírico de objetos físicos señalando meramente que (a) usamos la percepción sensible como un medio de fijar nuestras creencias acerca del mundo físico y (b) bajo el supuesto de que el CME-ismo es verdadero, cualquier método para fijar creencias empíricas que esté así limitado por la percepción sensible es, *de hecho*, confiable. Pero los CME-istas no tienen una explicación internalista de nuestro conocimiento empírico, porque no pueden alegar que los conocedores empíricos reales pueden justificar CME o aun que tales conocedores tienen alguna concepción del CME.

Por lo tanto, la situación del platonista pleno con respecto al conocimiento de los objetos matemáticos parece ser exactamente análoga a la de los CME-istas con respecto al conocimiento empírico de los objetos físicos. El platonista pleno puede proporcionar una explicación externalista de nuestro conocimiento matemático que es exactamente análoga a la explicación del CME-ista acerca de nuestro conocimiento empírico: donde el CME-ista apela a la percepción sensible, el platonista pleno apela a nuestra capacidad para separar teorías consistentes de teorías inconsistentes; y donde el CME-ista apela al CME, el platonista pleno apela al PP. Más aun, el intento del platonista pleno para proporcionar una explicación internalista del conocimiento matemático y el intento del CME-ista para proporcionar una explicación internalista del conocimiento matemático fracasa en puntos exactamente análogos: el primero falla en el intento de explicar el conocimiento que para el PP es verdadero y el segundo falla en el intento de explicar el conocimiento que para el CME es verdadero.

Me parece que los antiplatonistas sólo pueden bloquear mi argumento si se encuentra algún tipo de falta de analogía importante entre la situación epistemológica del platonista pleno y la del CME-ista. Ellos no pueden permitir que las dos situaciones sean análogas, porque el punto de la objeción de Benacerraf es el de hacer lugar a un problema *especial* para los objetos abstractos, es decir, un problema que sea fácilmente resoluble para los objetos físicos. Ahora bien, *puede* haber un problema epistemológico –por ejemplo, uno motivado por los argumentos escépticos al estilo de Descartes– que haga surgir un problema tanto para el CME como para el PP, pero simplemente no me ocupo de tales problemas aquí; sólo me interesa la preocupación de Benacerraf de que hay un problema epistemológico especial con los objetos abstractos.[22]

En este punto, se podría tratar de argumentar que *hay* una falta de analogía importante entre la explicación externalista del conocimiento matemático de los platonistas plenos y la explicación externalista del conocimiento empírico de los CME-istas. En el artículo mencionado antes, sin embargo, considero varias maneras en las que se podría tratar de establecer tal falta de analogía y argumento que ninguna de ellas funciona. Infortunadamente, sin embargo, no tengo el espacio para seguir esto aquí.

Me dirigiré a una tercera objeción a mi epistemología del platonista pleno. Puede ponerse en los siguientes términos. "Su epistemología está basada en la observación de que si el PP es verdadero, entonces toda teoría puramente matemática consistente describe verdaderamente alguna parte del reino matemático. Pero puesto que la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel con y sin el axioma de elección (es decir, ZFE y ZF + no E) son *ambas* consistentes, se sigue que E y no E, ambos, describen con verdad el reino matemático. Así, su perspectiva conduce a una contradicción."

Ya he sugerido cómo puede ser evitada esta objeción. La contradicción aquí no es genuina. El PP *realmente* implica que ZFE y ZF+ no E verdaderamente describen partes del reino matemático, pero no hay nada malo en esto, porque describen *diferentes* partes de ese reino. Esto podría expresarse diciendo que ZFE describe el universo de los conjuntos_1, mientras que ZF + no E describe el universo de los conjuntos_2, donde los conjuntos_1 y los conjuntos_2 son *clases* diferentes de cosas.[23] (Esto, por supuesto, simplifica de-

[22] Katz ha formulado un punto similar. Dice (1981, p. 212) que el "conocimiento empírico... no tiene ventajas sobre el conocimiento *a priori* al enfrentarse con el escéptico".

[23] Decir que los conjuntos_1 y los conjuntos_2 son *clases* diferentes de cosas podría ser ligera-

masiado las cuestiones, porque hay más de una clase de objetos descrita por ZFE, esto es, hay más de un universo en el que ZFE es verdadera. Hay, por ejemplo, universos en los que ZFE y la hipótesis del continuo –HC– es verdadera y otros en los que ZFE y no HC es verdadera). Así, mientras *podemos* derivar la verdad de ambos E y no E, *sólo* podemos hacer esto interpretando E de dos modos diferentes en los dos casos diferentes. Por lo tanto, en lo que respecta a que "E y no E" sea verdadera, no hay más una contradicción genuina que la que hay en la oración "Aristóteles se casó con Jackie Kennedy y Aristóteles no se casó con Jackie Kennedy". (Y nótese que puesto que, en matemáticas, nunca permitimos que un término cambie de significado dentro de una teoría, "E y no E" no será un teorema de ninguna de nuestras teorías matemáticas, excepto de aquellas que contienen una contradicción no vinculada.)[24]

Una cuarta objeción que podría levantarse en contra de mi punto de vista es que parece prohibirnos (sin ninguna buena razón) el hablar de *todos* los objetos matemáticos. Pero esto está mal, puede ser que no haya nada interesante que decir acerca del reino matemático completo, pero el PP ciertamente nos permite decir cosas como "Todos los objetos matemáticos son objetos matemáticos". Ahora bien, supongo que se podría lamentar que una oración como "No existe el número 7" sea consistente pero falsa –si se considera el reino matemático completo–. Pero justamente esto *no* es un problema para el PP. El PP nos dice que toda oración puramente matemática consistente describe verdaderamente parte del reino matemático; la oración de arriba no es un contraejemplo para esta alegación, porque *en efecto* describe verdaderamente parte del reino matemático. Ahora bien, por supuesto, esta oración *no* es verdadera del reino matemático completo, pero es irrelevante, porque el PP no pretende que toda oración que es verdadera de alguna parte del reino matemático sea verdadera de todo él.

Una quinta objeción posible que podría levantarse es que el PP parece sacrificar la objetividad de la matemática. Pero esto es justamente falso. De acuerdo con el PP, las teorías matemáticas son verdaderas de un reino matemático objetivo, esto es, ellas son verdaderas independientemente de nosotros. Ahora bien, se podría responder aquí que, a pesar del hecho de que los platonistas plenos pueden tolerar la existencia de oraciones matemáticas que son objetivamente verdaderas, no pueden tolerar la existencia de disputas

---

mente confuso, porque podríamos querer decir que las clases diferentes de conjuntos se generan mediante la relativización de nuestros cuantificadores. Así, en esta manera de ver las cosas, un único conjunto sería susceptible de clasificarse como $conjunto_1$ y como $conjunto_2$.

[24] Digo mucho más en respuesta a esta objeción en mi obra próxima a aparecer[2].

matemáticas con algún resquemo objetivo. Porque en la medida en que las partes de cada lado de un debate puramente matemático eviten la contradicción, el PP dictamina que *ambas* partes están en lo correcto. Pero, nuevamente, esta objeción está desencaminada. Hay al menos dos maneras en que los platonistas plenos pueden recuperar el resquemo objetivo de las disputas matemáticas. La primera tiene que ver con la noción de *inclusividad* o *amplitud*: el debate acerca de la HC, por ejemplo, podría ser construido como un debate acerca de si ZF + HC ó ZF + no HC caracteriza o no una noción más amplia de "conjunto". Y la segunda manera en la que los platonistas plenos pueden recuperar el resquemo objetivo es señalando que ciertos debates matemáticos son debates acerca de si alguna oración es verdadera o no en el *modelo estándar*.[25]

Una sexta objeción es la de que me he concentrado demasiado especialmente en la matemática *pura*. Para dar una epistemología platonista *completa*, se debería explicar nuestro conocimiento no sólo de las oraciones matemáticas puras, sino también de las oraciones matemáticas impuras y de las oraciones físicas mixtas. (Ambas oraciones, impuras y mixtas, se refieren a objetos físicos *y* matemáticos.) Pero no necesitamos dar una epistemología completa para refutar el argumento de Benacerraf, sólo necesitamos explicar cómo los seres humanos pueden lograr *algún* conocimiento del reino matemático. Así, sólo necesito preocuparme de la matemática pura. Sin embargo, mi epistemología *puede* generalizarse para cubrir las teorías impuras y mixtas. Esto puede ser sorprendente, porque –como Field ha señalado– tales teorías pueden ser consistentes pero falsas.[26] Pero todo lo que necesito hacer para acomodar tales teorías en mi epistemología es un cambio de discurso acerca de teorías consistentes a un discurso acerca de teorías que no implican ninguna falsedad respecto del mundo físico.[27]

Es preciso aquí señalar dos puntos. Primero, en el caso puro, este cambio es irrelevante, porque las teorías puras que no implican falsedades acerca del mundo físico justamente *son* las teorías puras *consistentes*. (Esto es porque las teorías puras inconsistentes implican *cualquier cosa* acerca del mundo físico, mientras que las teorías puras consistentes no implican *nada* acerca del mundo físico, esto es, las teorías puras consistentes son *conservadoras*, en el sentido

[25] De acuerdo con el PP, los modelos estándar no son ontológicamente privilegiados; qué modelos lleguen a contar como "estándar" depende de hechos acerca de *nosotros* y de la manera en que hacemos matemática. Sin embargo, la cuestión de qué oraciones son verdaderas en tales modelos en un asunto *objetivo*.

[26] La razón es que tales teorías pueden implicar falsedades acerca del mundo *físico*. Véase Field (1989), p. 56.

[27] Agradezco a Hartry Field por haberme señalado esto.

del término según Field.)[28] Segundo, en los casos impuros y mixtos, el cambio *no* es irrelevante: para lograr conocimiento de tal teoría, se necesita conocer (a) que la teoría en cuestión es consistente y (b) algunos hechos acerca del mundo físico. Pero adviértase que esto es exactamente lo que esperaríamos, porque tales teorías son, en mayor o menor medida, *acerca* del mundo físico.

Finalmente se podría levantar una séptima objeción a mi punto de vista en relación con el concepto de *unicidad*. Como Benacerraf ha señalado,[29] nuestras teorías matemáticas no describen partes únicas del reino matemático, esto es, todas las teorías matemáticas –aun las categoriales[30]– tienen múltiples modelos. Pero justamente no veo que esto sea un problema. Si sé que alguna teoría describe verdaderamente una parte del reino matemático, entonces tengo conocimiento de ese reino; el hecho de que la teoría en cuestión describa múltiples partes de ese reino simplemente es irrelevante. (Una inquietud relacionada con esto es que una teoría podría caracterizar una colección de objetos que son diferentes de los objetos que su autor *pretendía* caracterizar. Pero, nuevamente esto parece irrelevante: a despecho de lo que el autor pretendió, si una teoría matemática verdaderamente describe una parte del reino matemático, entonces se puede lograr conocimiento del reino matemático estudiando esa teoría.)

En el artículo mencionado antes, proporciono una defensa más completa del PP y de la epistemología del platonista pleno, aquí sólo he tratado de cubrir los puntos más importantes. Para finalizar, me gustaría proporcionar algún argumento positivo a favor del PP, esto es, me gustaría argüir que el PP es realmente la mejor versión del platonismo que hay. Ahora bien, hay un sentido en el ya he hecho esto. Si el PP evita la objeción de Benacerraf, y si las diferentes versiones del platonismo discutidas antes no evitan esta objeción, entonces el PP es claramente superior a ellas. Pero hay también razones *independientes* para favorecer el PP por encima de otros tipos de platonismo. Por ejemplo, el PP reconcilia la objetividad de la matemática (con la que están comprometidos todos los platonistas) con la legitimidad de modos pragmáticos de justificación en matemática.[31] A menudo se dice que la adopción de un nuevo axioma para una teoría matemática puede ser justificado pragmáticamente, por ejemplo, porque resuelve ciertas cuestiones abiertas. Los platonistas plenos pueden explicar esto fácilmente. Consideremos, por ejemplo, la cuestión de si adoptar o no la HC como un axioma en una teoría de conjuntos.

[28] Véase su (1989), p. 58.

[29] Benacerraf (1965).

[30] Una teoría es categórica si y sólo si todos sus modelos son isomórficos.

[31] Véase Maddy (1990), capítulo 4, para una discusión de este problema.

Puesto que existen conjuntos para los cuales la HC vale *y* conjuntos para los que falla, es legítimo estudiar ambos. La decisión de "adoptar" la HC es justamente la decisión de estudiar un cierto tipo de conjunto; así, no hay nada malo en motivar esta decisión pragmáticamente. Los platonistas no plenos, por otra parte, no pueden explicar esto. Puesto que, de acuerdo con su punto de vista, la HC es o verdadera o falsa del dominio *completo* de los conjuntos, no está claro por qué deberían ser legítimos los modos pragmáticos de justificación. ¿Por qué la fertilidad de una alegación sobre *el* universo de los conjuntos debería tener algo que ver con su verdad?[32]

Una segunda ventaja (relacionada) del PP es que reconcilia la objetividad de la matemática con la *libertad* extrema que tienen los matemáticos. Una manera de llegar a ser famoso que tiene un matemático es desarrollar una teoría interesante y útil acerca de un tipo de entidad matemática o de estructura que nadie haya aún concebido. Ahora bien, por supuesto, un físico podría también llegar a ser famoso de esta manera, pero antes de que aceptáramos una teoría física nueva de este tipo, exigiríamos elementos de prueba independientes de que existen los objetos físicos en cuestión. En matemática, sin embargo, no exigimos tales elementos de prueba para la existencia de los objetos; esto es, porque existen lo objetos de *toda* teoría puramente matemática consistente.

BIBLIOGRAFIA

Balaguer, M. (próximo a aparecer[1]), "A Platonist Epistemology", *Synthese*.

Balaguer, M. (próximo a aparecer[2]), "Against (Maddian) Naturalized Platonism", *Philosophia Mathematica*, 3.

Balaguer, M. (en preparación), *Knowledge and the Mathematical Realm*.

Benacerraf, P. (1973), "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, 70, pp. 661-667.

Benacerraf, P. (1965), "What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review*, 74, pp. 47-73.

Chihara, C. (1990), *Constructibility and Mathematical Existence,* Oxford, Oxford University Press.

Dedekind, R. (1988), *Was sind und was sollen die Zahlen?* Traducido por W. W. Beman como "The Nature and Meaning of Numbers" en *Essays*

[32] Los platonistas no plenos podrían objetar que las consideraciones pragmáticas son importantes tanto en la construcción de teorías empíricas como matemáticas. Pero los dos casos son radicalmente diferentes. Si una hipótesis empírica es pragmáticamente útil, buscamos confirmación independiente (no pragmática) de ella, y hasta que se obtiene tal confirmación la hipótesis se la considera sospechosa y *ad hoc*; pero esto no es verdadero en matemática.

on the Theory of Numbers, Chicago, Open Court Publishing, 1901.
Field, H. (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Nueva York, Basil Blackwell.
Frege, G. (1984), *Die Grundlagen der Arithmetik*. Traducido por J. L. Austin como *The Foundations of Arithmetic*, Oxford, Basil Blackwell, 1953.
Frege, G. (1919), "Der Gedanke". Traducido por A. M. y M. Quinton como "The Thought" en Klemke, comp., *Essays on Frege*, Urbana, University of Illinois Press, 1968, pp. 507-535.
Gödel, K. (1964), "What is Cantor's Continuum Problem?", reimpreso en Benacerraf y Putnam, comps., *Philosophy of Mathematics*, 2ª ed., Cambridge, Cambridge University Press, 1983, pp. 470-485.
Hellman, G. (1989), *Mathematics Without Numbers*, Oxford, Clarendon Press.
Katz, J. (1981), *Language and Other Abstract Objects*, Totowa, N.J., Rowman and Littlefield.
Lewis, D. (1986), *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Basil Blackwell.
Maddy, P. (1990), *Mathematical Realism*, Oxford, Oxford University Press.
Mill, J. S. (1843), *A System of Logic*, Londres, Longmans, Green and Company (nueva impresión 1952).
Quine, W. V. (1951), "Two Dogmas of Empiricism", reimpreso en *From a Logical Point of View*, 1953, Cambridge, Harvard University Press.
Resnik, M. (1981), "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference", *Nous*, 15, pp. 529-550.
Resnik, M. (1982), "Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology", *Nous*, 16, pp. 95-105.
Shapiro, S. (1989), "Structure and Ontology", *Philosophical Topics*, 17, pp. 145-171.
Steiner, M. (1975), *Mathematical Knowledge*, Ithaca, Cornell University Press.

CALIFORNIA STATE UNIVERSITY, LOS ANGELES

Traducción: María Cristina González

ABSTRACT

In this paper, I will try to describe the various versions of platonism; I will say what motivates the divisions within platonism and I will argue that one of these versions of platonism is the best, namely, *full blooded platonism*, which I have developed elsewhere.