LOS NUMEROS COMO OBJETOS Y EL ANALISIS DE LOS ENUNCIADOS NUMERICOS*

MATTHIAS SCHIRN

El objetivo científico principal de Frege era la fundamentación lógica de la teoría de números y del análisis. Pensaba que para este propósito era menester establecer no sólo la naturaleza puramente lógica de los números sino también su status objetual. Es un rasgo esencial de la concepción fregeana de los números como objetos que se basa enteramente en observaciones sintácticas. Esto vale notablemente para la estrategia que Frege sigue en su libro *Die Grundlagen der Arithmetik* de 1884.

En este artículo, quiero examinar críticamente algunos aspectos centrales de la concepción de los números naturales como objetos tal y como se presenta en *Grundlagen*. En la primera sección, caracterizo brevemente los criterios sintácticos que Frege formula para concebir expresiones numéricas como términos singulares. En la segunda sección, examino su análisis de lo que llama *indicaciones numéricas* [*Zahlangaben*]. La tercera sección está dedicada al problema que surge del doble papel de un numeral. En la cuarta sección, enfoco el tratamiento fregeano de los usos sustantivos y adjetivos de las palabras numéricas. En la quinta sección, trato de arrojar luz sobre el requisito de Frege de representar indicaciones numéricas como ecuaciones numéricas. Concluyo con tres observaciones en la sexta sección.

1. Criterios sintácticos

La concepción de los números como objetos parece estar hondamente enraizada en nuestro razonamiento y discurso matemático. Frege ciertamente es el primero que defendió de manera expresa esta posición en la historia de la

* He discutido el material de este artículo en castellano en la Sociedad Argentina de Análisis Filosófico (Buenos Aires), en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México, en la Universidad de Puerto Rico, Río Piedras, en la Pontificia Universidad Católica de Chile, en el Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona, y en la Conferencia ANPOF en Aguas de Lindoia. Una versión de este trabajo la he presentado también en inglés en las siguientes universidades: Oxford, Cambridge, St. Andrews, Boston (Colloquium for the Philosophy of Science), City University of New York (Graduate Center), University of Pennsylvania (Philadelphia), Berkeley (Logic Colloquium), Irvine, University of Southern California, Notre Dame, Chicago, Campinas (UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e Historia da Ciência). Quiero aprovechar la ocasión para agradecer al público, en particular a Alberto Moretti (SADAF), las discusiones fructíferas. Agradezco de todo corazón a Ivette Fred (Nueva York) y Roberto Torretti (Río Piedras, Puerto Rico) la lectura del manuscrito y las valiosas sugerencias estilísticas que me hicieron.

matemática. Luego, ¿cómo se explica que la concepción objetual de los números parezca imponérsenos? Siguiendo a Frege, la respuesta es muy simple: (a) expresiones como "4", "el número de los planetas", "6 + 2", "el número primo más pequeño entre 5 y 18", etc., se comportan lógicamente como términos singulares paradigmáticos, tales como los nombres propios o las descripciones definidas de personas, ciudades, lugares, etc.; (b) expresiones como "es primo", "es mayor que", etc., funcionan sintácticamente como auténticos predicados de primer nivel, y (c) expresiones como "algún número" y "todos los números" se asemejan a cuantificadores ordinarios de primer nivel. El paso desde estas observaciones sintácticas a la semántica del discurso aritmético parece natural. (a') Los términos singulares numéricos se refieren genuinamente a los números en cuanto objetos; (b') los predicados numéricos designan conceptos de primer nivel bajo los cuales los números caen o no caen, y relaciones del primer nivel que se mantienen o no se mantienen entre los números; (c') los cuantificadores teórico-numéricos designan conceptos de segundo nivel y cuyo alcance lo constituyen los números en tanto objetos. En pocas palabras: los números son aquello a lo cual los términos singulares numéricos se refieren, a lo que se aplican los predicados numéricos de primer nivel y aquello que corresponde al alcance de los cuantificadores numéricos de primer nivel.

Por lo general, existe el acuerdo de que la distinción entre función y objeto se encuentra en el mismo corazón de la filosofía de la lógica de Frege. Uno de sus elementos claves lo constituye la primacía de las categorías sintácticas *expresión funcional* y *nombre propio* sobre las categorías ontológicas de *función* y *objeto*. Estas últimas sólo son derivativas. Frege nunca abandonó esta posición, la que cristalizara completamente en su obra madura después de 1891. De acuerdo con este planteamiento, se podría decir que, para Frege, un objeto es todo aquello que puede ser denotado por un término singular. Un ejemplo revelador es su introducción de los dos valores de verdad en "Funktion und Begriff": "objeto es todo lo que no es función, tal que una expresión para él no contiene un lugar vacío. Una oración declarativa no contiene ningún lugar vacío y, por ende, debemos considerar a su referente como un objeto. Así, los dos valores veritativos son objetos" (KS, 134; TF, 147).[1]

Frege considera que el resultado más importante de su investigación acerca de la forma lógica de los enunciados numéricos es la comprensión de que una

[1] Aquí Frege supone tácitamente que una expresión que contiene uno o más lugares vacíos no puede designar un objeto. Además, no argumenta en favor de la afirmación de que la referencia de una oración declarativa es un valor veritativo. Véase al respecto su artículo "Über Sinn und Bedeutung" (KS, 148 y ss., TF, 62 y ss.). En "Einführung in die Logik" (NS, 211; PW, 194), Frege menciona el carácter completo o saturado de un pensamiento como razón adicional para concebir lo Verdadero y lo Falso como objetos.

indicación numérica como "El número 4 corresponde al concepto *lunas de Júpiter*" o "Hay cuatro lunas de Júpiter" contiene una predicación acerca de un concepto. Para facilitar la siguiente exposición llamo a esta comprensión el *principio de predicación numérica de Frege*, sucintamente PPN.

En *Grundlagen*, Frege se siente justificado al considerar a los números como objetos basándose en criterios puramente sintácticos, suscribiendo así la concepción de los números como objetos esquematizada más arriba. En realidad, es muy consciente de que la similitud que existe entre indicaciones numéricas y enunciados existenciales[2] y, en especial, su principio clave sobre la estructura lógica de las indicaciones numéricas podrían crear la impresión de que los números deberían identificarse con *conceptos* de segundo nivel.[3] Rechaza esta posible interpretación: (a) apelando a ciertos criterios sintácticos y (b) analizando la forma lógica de una indicación numérica. A continuación presento sus criterios sintácticos:

(1) Aplicamos de manera característica el artículo definido a los numerales y a otras expresiones numéricas.

(2) Términos numéricos como "9", "el número de los planetas", etc., se emplean típicamente a ambos lados del signo de identidad.

(3) En el lenguaje ordinario, las expresiones numéricas también ocurren en construcciones atributivas como, por ejemplo, en el enunciado "Jupiter tiene cuatro lunas". Semejante enunciado puede transformarse, sin embargo, en la ecuación "El número de lunas de Jupiter = 4" sin alterar el sentido.[4]

(4) Las palabras "todo", "cualquier", "ningún" y "algún" son prefijadas a palabras conceptuales. Expresiones como "un dos", "algunos dos" y "todos

[2] En la sección 53 de *Grundlagen*, Frege señala que la afirmación de existencia es, de hecho, nada más que la negación del número cero. Probablemente, considera, por ejemplo, "Hay leones" y "El número de los leones no es cero", como teniendo el mismo contenido enjuiciable. Asimismo, concibe, por ejemplo, las dos proposiciones "$N^0{}_x\ (x \neq x)$" ("El número 0 corresponde al concepto $x \neq x$") y "$\neg\ \exists x(x \neq x)$" como expresando el mismo contenido enjuiciable o pensamiento (cf. GLA, FA, § 55).

[3] Evidentemente, si Frege hubiese defendido la concepción de que los números han de identificarse con conceptos de segundo nivel, habría estado obligado a interpretar la identidad entre números como una relación de tercer nivel, y predicados como "es primo", "es mayor que", como predicados de tercer nivel. Una ecuación "$m = n$" sería verdadera si y sólo si cada concepto de primer nivel que cae bajo $N^m{}_x\ \varphi\ (x)$, cae también bajo $N^n{}_x\ \varphi\ (x)$, y viceversa: $m = n \equiv \forall F\ (N^m{}_x\ F(x) \equiv N^n{}_x\ F(x))$.

[4] Frege no dice literalmente que el enunciado "Júpiter tiene cuatro lunas" o "El número 4 corresponde al concepto luna de Júpiter" expresan el mismo contenido o sentido como "El número de lunas de Júpiter = 4", pero parece implicarlo.

los dos" son inadmisibles. Un numeral u otro término numérico no puede jamás ocupar el lugar lógico de un predicado.[5]

Estoy seguro de que Frege hubiera aceptado sin vacilar un criterio adicional, al menos en cuanto a lo que concierne a su *Begriffsschrift*. Esta última fue diseñada como un lenguaje lógicamente perfecto en el cual todas las expresiones muestran su forma lógica en la superficie. El criterio adicional es el siguiente:

(5) Los términos numéricos no contienen ningún lugar de argumento, ni explícitamente como símbolos de un lenguaje formal, ni implícitamente como expresiones de un lenguaje natural.

Ahora bien, aunque estuviésemos preparados para aceptar la posición de Frege de dar prioridad a las categorías sintácticas sobre las ontológicas, es altamente dudoso que estos criterios sintácticos proporcionen una justificación concluyente para poder reconocer a los números como objetos.[6] El criterio (1), en especial, me parece estrecho, aunque no todos los contraejemplos que se han aducido son forzosos. Ciertamente, un enunciado como "La ballena es un mamífero" es sólo un contraejemplo aparente. En este enunciado, la expresión "la ballena" puede ser sustituida legítimamente por "todas las ballenas" ("Todas las ballenas son mamíferos"), pero carecería de sentido sustituir "todos los dos" por "el dos" en el enunciado "El dos es un número primo". Hacer un escrutinio de los criterios de Frege para determinar la clase de los términos singulares sería una tarea de mayor envergadura y me alejaría de mi interés principal. Basta mencionar que, en su totalidad, tienen al menos algo de peso y no deben ser descartados como si carecieran de todo valor. Como ha señalado Crispin Wright, la principal debilidad de los criterios sintácticos de Frege es que es muy difícil que escapen a la circularidad. Para clasificar, con la ayuda de éstos, una expresión dada como un término singular, debemos invocar desde ya las nociones de término singular, referencia u objeto. Establecer criterios aceptables para determinar si una expresión corresponde a la clase de los términos singulares sigue siendo todavía un problema.

2. Enunciados numéricos analizados

Ahora veamos cómo analiza Frege un enunciado como "El número 4 corresponde al concepto *lunas de Júpiter*". En este enunciado, recalca él, el numeral "4" es sólo una parte del predicado (se debe considerar al concepto *lunas de Júpiter* como el verdadero sujeto gramatical). Agrega: "Por esta razón he evitado llamar a un número como el 0, el 1 o el 2, una propiedad de un concepto. Precisamente porque forma sólo una parte de lo que es aseverado, el número

[5] Véase también KS, 110; CP, 120.

[6] Véase el examen crítico de Wright sobre los criterios fregeanos en su 1983, 53 y ss.

se muestra a sí mismo como lo que es, un objeto autosubsistente" (GLA, FA 68).[7] Aquí Frege está recurriendo a las categorías *gramaticales de sujeto* y *predicado*, en oposición a uno de sus principios guías en *Begriffsschrift*.[8] Podemos ganar claridad sobre lo que en realidad quiere comunicar y otras dificultades en la sección 57 de *Grundlagen*, si comparamos los siguientes enunciados y sus respectivas formalizaciones. "F(x)" abrevia el predicado "lunas de Júpiter".

(1) El número 4 corresponde al concepto *lunas de Júpiter*.

(1*) $N^4{}_x\, F(x)$.

(2) Hay cuatro lunas de Júpiter.

(2*) $\exists 4x\, F(x)$.

(3) El número que corresponde al concepto *lunas de Júpiter* = 4.

(3*) $N_x F(x) = 4$.

Para ubicar esta discusión en perspectiva, me gustaría llamar la atención sobre tres tesis sintáctico-semánticas sostenidas por Frege.

(A) Diferentes oraciones pueden expresar el mismo pensamiento.[9]

[7] La traducción de Dummett, "The individual number, as being a self-subsistent object, appears precisely as a mere part of the predicate" (1991, 108), es engañosa. El número individual aparece como un objeto autosubsistente *precisamente por la razón* de que forma sólo una parte de lo que es aseverado.

[8] NS, 130, 153, 155; PW, 120, 141, 143; WB, 103, 164; PMC, 68, 100 y s.

[9] En su 1973, 378 y s., Dummett escribe: "Decir que el sentido de una proposición está compuesto de los sentidos de sus palabras componentes es decir [...] que podemos captar este sentido solamente como el de un complejo que está compuesto de partes exactamente de esta manera: sólo una proposición que tuviera precisamente esa estructura y cuyos componentes primitivos se correspondieran en su sentido punto a punto con aquellos de la proposición original, podrían posiblemente expresar el mismo sentido. (Por consiguiente, la noción fregeana de los sentidos de expresiones complejas concuerda estrechamente con el isomorfismo intensional de Carnap.)". Estas observaciones resultan ser incompatibles con la tesis (A), si esta última se aplica, como considero que se hace, a proposiciones que, según una interpretación estándar, tienen estructuras lógicas significativamente distintas como, por ejemplo, las proposiciones (2) y (3). Si la tesis (A) no tuviese validez, entonces, como subraya Frege, "se paralizaría la lógica, pues apenas puede cumplir su misión si no intenta reconocer al pensamiento bajo sus distintos ropajes" (KS, 170 nota al pie 7, TF, 46 nota al pie*). Además, la exégesis de Dummett contrasta con la tesis (B). Compárense, por ejemplo, las observaciones que hace Frege en "Über Begriff und Gegenstand", KS, 173 y s., TF, 49 y s. La tesis (A) respalda la tesis (B) en cuanto esta última se relaciona con el proceso de la descomposición de un pensamiento. Frege sostiene, en completo acuerdo con (A) y (B), que el mismo pensamiento puede ser considerado como compuesto de partes de modos diversos (NS, 218; PW, 201 y s.). Contrariamente a lo que afirma Dummett, la noción fregeana del sentido de una expresión compleja tiene poco, si algo, que ver con la noción de isomorfismo intensional introducida por Carnap. Cabe mencionar que no acepto más la distinción de Dummett entre dos tipos de análisis (véanse el capítulo 15 de su 1981 y la discusión de este capítulo en Schirn 1983). En todo caso, los escritos de Frege no proporcionan evidencia alguna de que hubiera aceptado la distinción que Dummett hace entre *análisis* y *descomposición*. Aquí no puedo entrar en detalle sobre este asunto importante.

(B) Una oración y el pensamiento que ella expresa pueden ser analizados (descompuestos) de distintas maneras.[10]

(C) Un pensamiento se construye con partes que corresponden a las partes a partir de las cuales se construye la oración que expresa el pensamiento.[11]

Las oraciones (1)-(3) y (1*)-(3*) confirman la tesis (A); según Frege, todas expresan el mismo pensamiento.[12]

Consideremos primeramente la oración (1*). Esta puede ser analizada en el predicado de primer nivel "F" y el predicado de segundo nivel (α) "$N^4{}_x\ \varphi(x)$" ["el número 4 corresponde al concepto φ"].[13] Así analizada, (1*) expresa que el concepto F de primer nivel cae bajo el concepto de segundo nivel $N_x4\ \ \varphi(x)$. Observaciones análogas se aplican a (2*). Del hecho de que el numeral "4" forma sólo un elemento de (α), Frege concluye: (a) que el número 4 no puede ser una propiedad del concepto F y (b) que 4 se muestra como un objeto autosubsistente.[14] Esta conclusión no es válida.

Primero, centrémonos en (b). Cuando Frege alega que el número 4 aparece como un objeto autosubsistente, parece insinuar que el numeral "4", tal como ocurre en el predicado "el número 4 corresponde a", funciona como un nombre propio del número 4.[15] Pero no es así. Y sería inútil defender una interpretación sustantiva de "4" basándose en el hecho de que en (1) aparece junto al artículo definido. Obviamente, "4" ocurre en (1) y (1*) como un componente sincategoremático, no teniendo así ningún papel referencial. Si en vez de la formulación sofisticada y tendenciosa de Frege, seleccionamos la más natural, (2), también vale que el numeral "4" forma sólo un elemento de un predicado

[10] Cf. KS, 173; CP, 188; NS, 203, 218; PW, 187, 201 y s.

[11] Cf. NS, 243, 262, 275; PW, 225, 243, 255; KS, 378; CP, 309; WB, 127; PMC, 79. Frege subraya que hablamos de modo figurativo cuando transferimos la relación entre *todo* y *parte* a pensamientos.

[12] No dudo de que Frege concebiría (1) y (2) como proposiciones sinónimas. Puesto que considera (1) y (3) como proposiciones que expresan el mismo contenido, tendría que sostener la sinonimia de (2) y (3) también. Pero estas afirmaciones envuelven una dificultad que voy a discutir en un momento.

[13] La letra "φ" marca un lugar argumental de tipo 2, es decir, un lugar argumental apropiado para expresiones conceptuales de primer nivel (más generalmente: para expresiones funcionales monádicas de primer nivel).

[14] Compárase lo que dice en dos fragmentos tardíos en relación con este asunto, NS, 276 y s., 296 nota al pie; PW, 256 y s., 276 nota al pie.

[15] Si Frege no sugiriera esto, sería difícil atribuir un sentido a (b). (b) no se sigue de ningún modo del hecho de que "4" ocurre solamente como una parte en "$N^4{}_x\ \varphi\ (x)$". Cuando examinamos a fondo el tratamiento que Frege ofrece de los usos adjetivos de palabras numéricas así como su primer intento de definir el número, veremos que su concepción del rol de un numeral "n" como elemento de una indicación numérica "$N\ {}^n{}_x\ F\ (x)$" carece de coherencia.

de segundo nivel. Aun así, en la oración (2), no encontramos ningún indicio de la alegada naturaleza objetual del número 4 o del supuesto carácter del término singular de "4". En (2) y (2*), "4" aparece como adjetivo y parte inseparable de un cuantificador numéricamente definido. El numeral "4" ni siquiera funciona sintácticamente como término singular porque "∃4" forma una sola unidad sintáctica.

Pasemos a analizar (a). Cuando Frege dice que ha evitado el caracterizar a un número como una propiedad de un concepto, presupone lo que justamente tiene que demostrar, a saber, que los números han de ser concebidos como objetos. Seguramente, al concebirse como un objeto, un número no podría, a su vez, ser una propiedad de un concepto de primer nivel. Además, del hecho de que en (2) y en (2*) el numeral "4" sea sólo una parte del predicado (β) "$\exists 4x\varphi(x)$" no se sigue que el número 4 no pueda ser considerado como un concepto de segundo nivel. Frege asume tácitamente que un número no puede ser designado por un predicado que contiene un numeral como parte constituyente, tal como (α) o (β). Evidentemente, sólo si fuese capaz de demostrar que "4" como elemento de cualquiera de esos predicados denota al número 4, se seguiría que el predicado completo no puede denotar el número 4. Y si Frege quisiera argumentar que el predicado (α) "$N^4_x\ \varphi(x)$", en virtud de su naturaleza insaturada, no designa el número 4, sólo podría hacerlo invocando su tesis, todavía no fundamentada, de que los números son objetos. Una lectura comprensiva de las observaciones introductorias de la sección 57 sólo revela lo siguiente: un enunciado numérico como (1) o (1*) expresa que el concepto F cae bajo el concepto $N^4_x\ \varphi(x)$.

En contraste con (1*) y (2*), la oración (3*), según su interpretación estándar, no expresa que la relación de nivel desigual de *caer bajo* se mantiene entre un concepto de primer nivel y un concepto de segundo nivel.[16] La oración (3*) expresa más bien que la relación de (primer nivel) de identidad se mantiene entre $N_xF(x)$ y 4. Pero claramente no hay necesidad de interpretar (3*) de acuerdo a su gramática superficial. En realidad, la oración (3*) y el pensamiento que ella expresa son susceptibles de diversos análisis, como lo sugiere la tesis (B), y, por lo tanto, pueden ser considerados como si estuviesen compuestos de distintas maneras (cf., por ejemplo, NS, 218; PW, 201 y s.). Podemos, por ejemplo, analizar (3*) en los predicados "F" y (γ) "$N_x\ \varphi(x) = 4$". Al hacerlo, descomponemos el pensamiento correspondiente de una manera "no

[16] Esta relación es similar a la relación de nivel desigual *caer bajo* que existe entre un objeto y un concepto de primer nivel. En el lenguaje formal de Frege, este último se designa mediante "—$\varphi(\xi)$.

estándar". De acuerdo con este análisis, (3*) expresa que el concepto F de primer nivel cae bajo el concepto de segundo nivel $N_x \varphi(x) = 4$.

3. El doble papel de un numeral

Comienzo con una aclaración. Por *fregeano* entiendo alguien que suscribe las doctrinas de Frege o al menos simpatiza con ellas. Para el presente propósito, podemos ignorar el hecho de que algunas doctrinas de Frege hayan sufrido cambios significativos. Sin embargo, si estoy en lo correcto, ninguna de estas modificaciones significa un cambio radical.

Estas consideraciones sintáctico-semánticas arrojan un primer resultado interesante para el fregeano. Pero también lo involucran en una dificultad. Más específicamente, ponen en cuestión la concepción intuitivamente plausible de que si (3) en cuanto oración de primer nivel es sinónima de (1) y (2), entonces esto tiene que valer igualmente para (3) en cuanto oración de segundo nivel.[17] El primer resultado es éste. Las oraciones (1) y (2) que nos sirven de ejemplo no envuelven una referencia a números concebidos como objetos o una cuantificación sobre ellos. Al menos para (1) y (2) podemos así explicar adecuadamente lo que es captar el pensamiento expresado por ambas oraciones sin tener que explicar el mecanismo de referencia identificatoria a números en cuanto objetos abstractos. Y (3) en cuanto enunciado de identidad se supone que expresa el mismo pensamiento que (1) y (2). Además, si Frege hubiese dotado a (3) con una interpretación no estándar, exhibiéndola como una oración de segundo nivel, estaría completamente justificado en aplicar a (3) lo que dice sobre una indicación numérica tal como (1) o (2). Así interpretado, (3) contiene efectivamente una predicación acerca de un concepto. Vista desde este ángulo, la concepción de los números como objetos puede aparecer como un recurso menos indispensable incluso para el fregeano, aunque esto no le haga perder su atractivo inicial.

Como el lector habrá ya adivinado, la dificultad a que aludo se basa en el papel diferente que desempeña el numeral "4" por una parte en (1*) o (2*) y por otra en (3*) como oración de "segundo nivel".[18] He subrayado el hecho de que en (1*) y (2*) "4" aparece como un elemento sincategoremático de un

[17] Por supuesto, la distinción que hago entre oraciones de "primer nivel" y oraciones de "segundo nivel" no se debe entender en un sentido absoluto. Por esta razón uso comillas. Considerada como una oración en la que algo es aseverado acerca de un concepto, (3) es de primer nivel; concebida como una oración en la que algo es aseverado de un concepto de primer nivel, (3) es de segundo nivel.

[18] Brian Loar me llamó la atención sobre este punto.

predicado de segundo nivel. No así en (3*), concebida como una predicación acerca de un concepto. Como un constituyente de (γ) "$N_x\ \varphi(x) = 4$", el numeral "4" figura como un término singular que se refiere al número 4. En contraste con (α) "$N^4_x\ \varphi(x)$" y (β) "$\exists 4_x\ \varphi(x)$", (γ) es un predicado complejo; captar el sentido de (γ) implica, a la luz de la posterior teoría fregeana del sentido, captar los sentidos de los constituyentes "=", "$N_x\ \varphi(x)$" y "4".[19] Y, de acuerdo con esta teoría, el sentido de una expresión compleja está determinado por los sentidos de sus partes relevantes y por la manera en que éstas se combinan para formar la expresión compleja. Por consiguiente, si (3*) en cuanto oración de "segundo nivel" debe expresar el mismo pensamiento que (1*) y (2*), entonces el sentido de (γ) tiene que coincidir con el sentido de (α) y (β). ¿Pero cómo puede el fregeano aceptar esta conclusión, si está dispuesto a admitir que en (γ) "4" funciona sintáctica y semánticamente como un término singular, mientras que la presencia de "4" en (α) y (β) es sincategoremática?

El fregeano podría considerar diversas opciones en respuesta a este dilema.

(i) Una opción que nos viene inmediatamente a la mente es ésta: negar que (3*) pueda analizarse propiamente como conteniendo una predicación acerca de un concepto de primer nivel. Es innegable, sin embargo, que tal opción resultaría irreconciliable con uno de los principios a los que Frege se adhirió firme y constantemente; me refiero naturalmente a la tesis (B): una oración y el pensamiento que ella expresa se pueden analizar de modos diferentes.

(ii) Una segunda opción consistiría en negar que (3*) expresa el mismo pensamiento que (1*) o (2*) independientemente de cómo esté descompuesto. A la luz de la posición de Frege en *Grundlagen*, estoy casi seguro de que él hubiera rechazado esta posibilidad sin vacilar.

(iii) Del mismo modo, habría descartado, pienso, la propuesta de tratar a (γ), en lo que sería un truco bastante artificial, como un predicado simple que contiene "4" como un elemento sincategoremático.

(iv) Como señalé anteriormente, podemos dar por descontado que el fregeano no estaría inclinado a retractarse de la afirmación de que (3*) en cuanto ecuación expresa el mismo sentido que (1*). Supongamos ahora que el fregeano rehúsa aceptar nuestra previa conclusión de que el sentido de (γ) tiene que coincidir con el sentido de (α), sobre la base de que la premisa es inválida. Evidentemente, en ese caso estaría obligado a aducir un argumento convincente que lo autorizara a negar la sinonimia de (3*) en cuanto oración de "se-

[19] Aquí estoy invocando la teoría fregeana del sentido solamente para facilitar mi argumentación, aunque, claro está, soy consciente del hecho de que Frege aún no había formulado esta teoría cuando escribió *Grundlagen*.

gundo nivel" con (1*), mientras deja intacta la sinonimia de (3*) en cuanto enunciado de identidad con (1*). No veo cómo el fregeano podría satisfacer esta obligación.

(v) Para establecer una opción final, prescindamos de (2*), como antes. Ahora bien, Frege tal vez quisiera defender la tesis de que "4" funciona como término singular no sólo en (3*), independientemente de cómo se considere ésta, sino también en (1*). Repárese en que en la sección 57 de *Grundlagen* parece estar jugando con la idea de mantener tal tesis. Es obvio que si esta tesis se dejara sostener, podría vérsela como un refuerzo a la defensa que Frege hace de la concepción de que los números son objetos. No obstante, hemos observado que esta tesis resulta ser indefendible; en particular, la aparición del artículo definido en (1) es meramente engañosa, no genuina. Y me imagino que Frege lo sabía.

Parece, pues, que el fregeano no puede aceptar ninguna de estas opciones. En lo que a mí respecta no veo un camino fácil para salir de este atolladero. Pero aún no hemos llegado al final de nuestra discusión sobre la estrategia de Frege para establecer la concepción de que los números son objetos. Podemos alcanzar una idea más completa de ella, si sometemos su manera de interpretar palabras numéricas a un escrutinio más exhaustivo.

4. Uso sustantivo *versus* uso adjetivo de palabras numéricas

Frege basa su análisis sintáctico de palabras numéricas en ejemplos tomados de la teoría de números y del lenguaje natural, aprovechándose del hecho de que en las oraciones aritméticas predomina el uso de dichas palabras como sustantivos. Ahora bien, él no proporciona ninguna razón convincente para negar que el uso adjetivo de palabras numéricas desempeñe un papel significativo en la determinación de la naturaleza ontológica de los números cardinales. Sólo subraya que lo que realmente importa es entender el concepto de número tal y como es útil para la ciencia. Pero, ¿por qué una concepción adjetiva de los números es científicamente inapropiada o inservible? ¿Porque entonces no podríamos explicar la ocurrencia de expresiones numéricas en ecuaciones cuya forma, piensa Frege, es la que prevalece en la aritmética? Supongamos que se puede probar que los enunciados aritméticos en los cuales las palabras numéricas funcionan sintácticamente, en la superficie, como términos singulares, pueden ser transformados en enunciados en que las palabras numéricas funcionan como adjetivos. Entonces, cada argumento aducido por Frege en las secciones 56-57 en favor de su declarada concepción de que los números son objetos carecería de fundamento. De hecho, él tiene una actitud vacilante cuando caracteriza el status ontológico de los números cardinales apelando a consideraciones sintácticas. Por un lado, se apoya principalmente en ciertos usos de las palabras numéricas como sustantivos tanto en la teoría de números como en el lenguaje ordinario, tomando literalmente a los términos numéricos tal como parecen ocurrir. Por otro lado, no adjudica ninguna importancia al hecho de que existan usos adjetivos igualmente naturales de palabras numéricas en enunciados numéricos. No se toma mucho trabajo para eliminarlos.

Reflexionemos un poco más sobre el tratamiento, un tanto oscuro, que Frege ofrece del uso adjetivo de las palabras numéricas. En la sección 57 de *Grundlagen*, sostiene que el uso adjetivo de las palabras numéricas en el lenguaje natural puede eliminarse siempre. Y en la sección 60 enfatiza que la autosubsistencia que corresponde al número está destinada a excluir el uso de una palabra numérica como predicado o adjetivo. Frege, de hecho, sugiere un análisis de indicaciones numéricas que parece estar en consonancia con una concepción de las expresiones numéricas como adjetivos. Estas contienen una predicación acerca de un concepto. Al mismo tiempo, aparentemente, trata de encubrir lo que claramente es un uso adjetivo del numeral —por ejemplo, el uso de "4" en (1)— introduciendo el uso del artículo definido en indicaciones numéricas.

Aquí Frege patina sobre una capa delgada de hielo. No sólo no es el método verdadero de la filosofía el ocultar lo que uno sabe que existe, sino que una maniobra tal no tiene sentido si uno está dispuesto a defender la concepción de que los números son objetos. Los comentarios finales de Frege en la sección 56 evidencian que era perfectamente consciente de que en un enunciado como (1) el numeral forma una parte inseparable de un predicado de segundo nivel, y como tal, no tiene ninguna función referencial. Hay que admitir que esto no se reconcilia con lo que Frege parece insinuar al comienzo de la sección 57 concerniente al uso del artículo definido en una indicación numérica. Pero echemos a un lado esa discrepancia, sea ella genuina o sólo aparente, y pasemos a considerar otra dificultad de la sección 57.

5. Indicaciones y ecuaciones numéricas

El asunto que voy a considerar ahora tiene varias facetas relacionadas entre sí. El título de la sección 57 es como sigue: "Una indicación numérica debe ser considerada como una ecuación entre números". Frege afirma que el enunciado "Júpiter tiene cuatro lunas" puede ser convertido en una ecuación numérica, evitando de este modo un uso adjetivo del numeral. Al mismo tiempo, pretende haber establecido, al analizar una indicación numérica "$N^n{}_x F(x)$" de acuerdo con el PPN y apelando al hecho de que "n" forma sólo un elemento del predicado "$N^n{}_x\ \varphi\ (x)$", que en una tal indicación el número individual aparece como un objeto autónomo. Entonces, ¿por qué y con qué derecho él insiste en que una oración como (1) tiene que ser considerada como una ecuación numérica?

Mi posición al respecto es como sigue. Aun si Frege no pretendiera haber mostrado que, en indicaciones numéricas, un número individual aparece como un objeto autosubsistente, ciertamente hubiera podido aceptarlas como enunciados numéricos por derecho propio. PPN tiene principalmente la finalidad de fijar la estructura lógica de oraciones aritméticas de un cierto tipo. ¿Con qué derecho, entonces, Frege pudo otorgar tanto peso al PPN cuando consideró que había que prescindir precisamente del tipo de enunciados numéricos a los cuales se pretende aplicar el PPN? En otras palabras: si en *Grundlagen* creía que para defender una concepción objetual de los números cardinales era menester omitir indicaciones numéricas representándolas como ecuaciones numéricas, entonces el PPN sería un principio que no desempeñaría ningún papel importante en su proyecto de proporcionar una fundamentación de la aritmética. Pero esto último iría en contra de la evidencia de que disponemos. Aun después de haber abandonado sus tesis logicistas, Frege expresamente suscribió el PPN (cf. NS, 298; PW, 278). En su fragmento tardío "Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik", repite dos de sus aserciones tempranas, considerándolas todavía como verdaderas. Uno de esos principios venerados es el PPN; él se refiere al primer volumen de *Grundgesetze*, página 3: "De este modo, se reconocería finalmente que una indicación numérica contiene una predicación acerca de un concepto". Si estoy en lo correcto, entonces, en *Grundlagen* Frege está convencido de que la adhesión al PPN no tiene que socavar su concepción de los números como objetos. En cualquier caso, entender un enunciado como (1) o (2) como una predicación acerca de un concepto de primer nivel, no lo obliga a reconocer a los números cardinales como conceptos de segundo nivel. Una vez más: ¿por qué debe rechazar el reconocimiento de las indicaciones numéricas como enunciados numéricos por propio derecho? ¿Cómo puede negarles ese reconocimiento?

Dummett (1991, 109) afirma que la solución de Frege al problema de relacionar los usos adjetivos y sustantivos de las palabras numéricas es, aparentemente, como sigue: tratar a los usos adjetivos como formas disfrazadas de usos sustantivos. Según el análisis que Frege sugiere en la sección 57, la estructura superficial de una proposición como (2) es engañosa. Cuando uno revela su estructura profunda, se la puede reconocer como una ecuación numérica. Aunque Frege parece favorecer esta interpretación, yo no estoy seguro de que sea enteramente correcta. Hemos visto que Frege trata a la gramática superficial de las oraciones numéricas de una manera ambivalente. Por un lado, la toma como una guía fiable para determinar el status ontológico de los números cardinales; por otro lado, descarta la estructura superficial de ciertas oraciones numéricas considerándola inesencial para este propósito. En este respecto, estoy básicamente de acuerdo con Dummett. Dudo, sin embargo, de que Frege, forzado a poner todas las cartas sobre la mesa, hubiera descrito la gramática superficial de las indicaciones numéricas como engañosa en el sentido de que ellas contienen una referencia encubierta a un número como objeto.

Para comenzar, considero que Frege hubiera aceptado que (1*) y (2*) corresponden fielmente a la verdadera forma lógica de (1) y (2) respectivamente. Esta forma no emerge como el resultado de sacar a la luz una gramática profunda encubierta. Al menos la oración (2) parece estar libre de imperfección lógica: no requiere que la transformen en una ecuación numérica para que sea científicamente respetable. Un pasaje en "Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter" (1919) de Frege confirma que una representación simbólica de una indicación numérica en su formalismo estaría de acuerdo con el PPN. "Puesto que una indicación numérica basada en contar contiene una predicación acerca de un concepto, la oración que da una indicación numérica en un lenguaje lógicamente perfecto debe contener dos partes, a saber, un signo para el concepto acerca del cual se hace la indicación, y un signo de un concepto de segundo nivel" (NS, 277; PW, 256). Si Frege considerase sumamente engañosa la gramática superficial de (1) y (2), ¿no contradiría el PPN?

Fijémonos más cuidadosamente en lo que la propuesta de Dummett parece implicar. Si Frege sostuviese la posición que Dummett le achaca, entonces el proceso de revelar la gramática profunda de una indicación numérica equivaldría a lo siguiente: la forma lógica real de lo que en la superficie aparece como una oración de "segundo nivel", como (1) o (2), resulta ser la abierta estructura superficial de una oración de "primer nivel", como (3). La forma superficial de (3), a diferencia de la de (1) y (2), se reconoce como irreprochable. De acuerdo con esta posición, la estructura superficial y la estructura profunda de (3) coincidirían, a menos que Frege fuese a mantener —lo que me parece poco probable— que el análisis no estándar de (3) exhibe su estructura profunda. Como he señalado anteriormente, la distinción entre oraciones de "primer nivel" y oraciones de "segundo nivel" no se debe considerar como absoluta. Mientras que (1) y (2) no admiten un análisis sintáctico que las muestre como de "primer nivel", (3) puede ser analizada de tal modo que emerja como una oración de "segundo nivel". Por lo tanto, si atribuyéramos a (3) una tal interpretación no estándar, la transición de (1) o (2) a (3) no envolvería distintos niveles. De hecho, lo que dice el PPN se aplicaría todavía a la oración (3), cuya forma superficial, como Dummett barrunta, Frege considera que muestra la verdadera cara de (1) y (2): (3), así concebida, contiene una predicación acerca de un concepto de primer nivel.

Dummett no especifica con mucho detalle cómo hemos de entender el proceso de revelar la estructura profunda de una indicación numérica. No basta decir que consiste en considerar a (1) o (2) como formas disfrazadas de (3). Cualquiera sea la transición propuesta de (1) o (2) a (3), al revelar la estructura profunda de (1) o (2), éste no puede tener nada que ver con el método de descomposición que Frege sostuvo a lo largo de su carrera académica.[20] Me refiero al proceso (a) de excluir de una oración (o, en caso más general, de un término complejo) algunas o todas las ocurrencias de una expresión, y (b) de dar a conocer a los huecos así formados como un lugar argumental del tipo apropiado, generando así una expresión funcional (una expresión conceptual o relacional). Frege describe este proceso, en términos precisos, mediante las tres reglas de buena formación para nombres funcionales en la sección 26 de *Grundgesetze*. Llamo a estas reglas *principios de formación de huecos*. Su aplicación produce la descomposición de una oración (o término complejo) en expresiones componentes, es decir, en la expresión que excluimos y el nombre funcional que obtenemos. Para Frege, la operación sintáctica de descomposición o análisis corre pareja con el proceso de dividir un sentido complejo en partes de sentido más simples. Si el análisis de una expresión compleja se efectúa a partir de una proposición, se trata, en el dominio del sentido, de una descomposición de un pensamiento en partes de pensamiento. Vale la pena subrayar que la división de un pensamiento en partes está, en efecto, inextricablemente entrelazada con la operación de analizar la proposición correspondiente en partes. La inversión no vale necesariamente, como resulta claramente de la posibilidad de descomponer proposiciones que corresponden a lenguajes artificiales todavía no interpretados.

Regresemos ahora a las oraciones que nos sirven de ejemplo. No podemos obtener de (1) o (2) el operador numérico, ni discernir el signo de igualdad en ambas oraciones; y el numeral "4" aparece como adjetivo y elemento inseparable de un predicado de segundo nivel, esto es, no tenemos derecho a omitir "4" en (1) o (2) aplicando el primer principio de formación de huecos.[21] Por lo

[20] Según este principio, de un nombre objetual complejo se excluye un nombre propio, que forma una parte de él o coincide con él, en algunos o todos los lugares donde ocurre y da a conocer el hueco (o los huecos) así formado(s) como lugar argumental de tipo 1, esto es, como lugar argumental que admite la colocación de un nombre propio. De este modo, obtenemos un nombre funcional monádico de primer nivel.

[21] Aplicado a la transición de (B1) a (B2), un signo de una relación de segundo nivel sería reemplazado por un signo de una relación de primer nivel.

tanto, ninguna de estas proposiciones admite un análisis lógico que las revele como ecuaciones numéricas.

A primera vista uno podría intentar la transformación de (1) en (3) siguiendo la transición de (A1) "a ‖ b" ("La recta *a* es paralela a la recta *b*") a (A2) "D(a) = D(b)" ("La dirección de la recta *a* es igual a la dirección de la recta *b*") o de (B1) "Ex(F(x), G(x))" ("El concepto F es equinumérico con el concepto G") a (B2) "NxF(x) = NxG(x)" ("El número que corresponde al concepto F es idéntico al número que corresponde al concepto G") como sugiere Frege en la sección 64 de *Grundlagen*. Ahí sostiene que uno y el mismo contenido (enjuiciable) puede analizarse de distintas maneras y así emerge en oraciones de forma lógica significativamente diferente. Frege describe este proceso del modo siguiente: "Reemplazamos [...] el símbolo ‖ por el símbolo más general =, distribuyendo a *a* y a *b* el contenido particular del primer símbolo. Descomponemos el contenido de un modo diferente al original, y con ello obtenemos un concepto nuevo" (GLA, FA, 74 y s.).[22] Encuentro esto difícil de seguir. Ciertamente, lo que tenemos aquí es la transición de un modo de hablar a otro que nos proporciona el operador de dirección. Se dice que ambas maneras de hablar tienen el mismo contenido. Es igualmente obvio que la transición de (A1) a (A2), tal como la describe Frege, no puede pretender ser una operación puramente lingüística. Se trata más bien de una operación mixta, llevada a cabo tanto en el nivel de los signos como en el nivel del contenido. En particular, a la transición no se la puede considerar como incorporando cualquier proceso de descomposición genuina tal como se especificó anteriormente.[23] Independientemente de la vaguedad que veo en el modo en que Fre-

[22] Esto sería más manifiesto si interpretáramos la transición de (A1) a (A2) y la de (B1) a (B2) como un proceso que proporciona nuevos *objetos* abstractos. Frege está a punto de expresarlo de este modo cuando comenta la transición de una relación de equivalencia a una igualdad incorporada en el Axioma V. Sin embargo, se resistiría a describir la abstracción lógica como un procedimiento que crea nuevos objetos lógicos; véase GGA II, 147 y ss., TF, 179 y ss. Algunas cuestiones respecto de la transformación de (A1) en (A2) quedan abiertas. ¿Qué quiere decir exactamente que el contenido particular de "=" se distribuye entre a y b? ¿Cuál se supone que es el modo *original* de descomponer el contenido de (A1) y (A2)? En cuanto a la segunda cuestión, el contenido o pensamiento, como es expresado por la proposición original (A1), podría dividirse en los sentidos de "a", "b" y "‖" aplicando el método de descomposición que describí arriba. No obstante, sería raro considerar como resultado de esta operación que el pensamiento en cuestión emerge en (A1). Repito: no hay manera alguna de descomponer un pensamiento independientemente del proceso de analizar una oración que lo expresa. En particular, la descomposición del sentido expresado por (A1) y (A2) en los sentidos de "a", "b" y "‖" es sólo posible analizando (A1) justamente en estas tres expresiones. Así pues, aun cuando aceptáramos la operación mixta mediante la cual Frege trata de explicar la transición de (A1) a (A2), sólo podríamos decir que el contenido de la oración original (A1) puede descomponerse de tal modo que resulta en una oración de forma lógica diferente, es decir, en (A2).

ge caracteriza la transición de (A1) a (A2), esta caracterización no proporciona una clave de cómo tenemos que entender la transformación de (1) en (3). Pues la capacidad dé ser descompuesto en términos de una operación mediante la cual se reemplaza un símbolo y se distribuye un contenido particular, parece ser un privilegio que solamente disfrutan algunos contenidos enjuiciables muy especiales, a saber, los que uno puede expresar mediante un enunciado de equivalencia. Y no cabe duda de que Frege niega que (A1) y (B1) se puedan considerar como modos encubiertos de expresar (A2) y (B2). No obstante, Dummett afirma precisamente que Frege considera a (1) o a (2) como formas encubiertas de (3). Así resulta claro que la transición de (A1) a (A2) no sirve de ningún modo como modelo para revelar la naturaleza de la transformación de (1) en (3).

Concluyamos ya nuestra prolongada discusión de los intrincados asuntos contenidos en la sección 57. ¿Hubiera Frege podido aceptar la tesis siguiente? Las indicaciones numéricas deben aceptarse como enunciados numéricos por derecho propio. En tales enunciados, un numeral aparece adjetivamente como una parte inseparable de un predicado de segundo nivel y como tal no tiene un papel referencial. Admitir predicaciones acerca de conceptos tales como (1) y (2) como enunciados numéricos por derecho propio no amenaza, ni menos aun socava, la concepción de los números como objetos. Ahora bien, mi respuesta a nuestra cuestión es claramente "sí". Frege hubiese podido aceptar una posición como ésta y, de hecho, sin ninguna molestia residual con respecto al uso adjetivo de un numeral.

En *Grundlagen*, Frege define el número que corresponde al concepto F, después de dos intentos fracasados de definición, como la extensión del concepto *equinumérico con el concepto F*. Si bien en sus últimos escritos, Frege descartó enteramente las extensiones de conceptos y se decidió, aunque en una forma bastante fragmentaria, por una fundamentación geométrica de la aritmética, nunca abandonó su concepción de los números como objetos.[24] Es muy cierto que expresa algunas dudas con respecto a este carácter objetual de los números, pero éstas parecen estar motivadas principalmente por su creciente escepticismo respecto de la viabilidad de su logicismo, que finalmente rechaza en su totalidad, y no por una comprensión nueva y bien definida de la forma lógica de los términos y enunciados numéricos.[25] Por eso no resulta sorprendente que en su fragmento "Zahl" de septiembre de 1924 reitere una idea que lo había guiado en *Grundlagen*. Prestando la debida atención al uso

[23] Cf. NS, 288 y s.; PW, 269, 278 y ss.

[24] Cf. NS, 277, 282, 298 y s.; PW, 256 y s., 263.

[25] Cf. NS, 284 y s.; PW, 265.

que hacemos de los numerales y de las palabras numéricas, podemos tratar de descubrir algo sobre la naturaleza de los números mismos. Puesto que las palabras numéricas se emplean, al igual que los nombres de objetos, como nombres propios, entendemos por un número un objeto (que no puede percibirse por los sentidos).

6. Observaciones finales

Quiero concluir con tres observaciones.

Primero: No es evidente en los escritos de Frege hasta qué punto su concepción de los números como objetos depende de su identificación de los números con extensiones de conceptos. Parece ser que, para establecer a la luz de los principios fregeanos que los números son objetos, sería suficiente un análisis de la forma lógica de los términos y enunciados numéricos. No hay una razón convincente de buenas a primeras para que Frege piense que la tesis de que las extensiones de conceptos son objetos es científicamente superior a la tesis de que lo son los números. Siguiendo los criterios sintácticos fregeanos, tanto los términos numéricos como los términos para clases deben ser considerados como términos singulares genuinos. No está en absoluto fuera de duda, no obstante, que Frege esperase *asegurar* la naturaleza puramente lógica de los números reduciéndolos a extensiones de conceptos. Es ante todo la transición de una equinumericidad entre conceptos de primer nivel a una identidad entre números cardinales la que Frege considera que es algo puramente lógico. Frege piensa esto sobre la base de que la equinumericidad o correspondencia biunívoca puede reducirse a términos puramente lógicos, a saber, al término "relación". Aunque se dice que "concepto" y "relación" son expresiones que corresponden intrínsecamente a la lógica pura, Frege se abstiene de hacer una afirmación similar respecto del término "extensión de un concepto". Y sabemos, naturalmente, que después de 1891 sostuvo con énfasis que el concepto precede lógicamente a su extensión (cf., por ejemplo, KS y s.; CP, 228).

Segundo: Hemos visto que las razones sintácticas que Frege aduce para concebir a los números naturales como objetos no son convincentes. Esto no quiere decir que Frege no tenía una verdadera razón para concebir a los números naturales como objetos. En su libro *Frege: Philosophy of Mathematics* (1991), Michael Dummett muestra que la estrategia radical adjetiva —que rehúsa tratar los términos numéricos literalmente tal como parecen ocurrir en la teoría de los números— se puede seguir en una parte considerable de *Grundlagen* al convertir las definiciones y pruebas relevantes en sus análogos adjetivos. Sin embargo, el análogo del teorema fundamental de que cada número finito es sucedido por un número finito no se puede demostrar. Russell, cuya teoría de los tipos requería que se distinguiera a los números (concebidos como clases de clases) de los individuos, debía introducir un axioma de infinitud (diciendo que hay una cantidad infinita de individuos) para garantizar una cantidad infinita de números cardinales. Frege, a diferencia de Russell, reconoció los números como pertenecientes al dominio de las variables individuales. Es sólo por esta razón que Frege era capaz de construir la secuencia infinita de los números naturales a partir de la nada, por así decirlo (véase Dummett 1991, 132 y s.).

Tercero: Fue, por cierto, Benacerraf quien en su artículo "What Numbers Could Not Be" (1965) lanzó el primer ataque realmente enérgico contra la tesis de Frege de que los números son objetos, revelando una fuerte indeterminación referencial de los términos numéricos. Aquí bastará con hacer unas cuantas observaciones sobre lo que considero la quintaesencia del reto ontológico de Benacerraf. El platonista respecto de la aritmética identifica los números con conjuntos. Así, cada número individual sería un conjunto particular. Sin embargo, Benacerraf argumenta que los números no pueden ser conjuntos ya que no existe ninguna buena razón que justifique la identificación de un número individual con un conjunto individual. Obviamente, no hay, por ejemplo, una manera única de introducir los números naturales y los números reales en la teoría de conjuntos. La identificación de los números con conjuntos está socavada al parecer no sólo por la arbitrariedad de nuestras selecciones, sino también por la arbitrariedad de tomar a los conjuntos como los objetos básicos de la matemática. Es posible, por ejemplo, considerar los números ordinales como objetos básicos y definir los conjuntos en términos de éstos. Extendiendo a toda clase de objetos la conclusión de que los números no pueden ser conjuntos, Benacerraf concluye que los números no pueden ser objetos en absoluto. Al enunciar las propiedades de los números, sólo estamos caracterizando una *estructura abstracta* —"y la distinción yace en el hecho de que los 'elementos' de la estructura no tienen otras propiedades que las que los relacionan con otros 'elementos' de la misma estructura" (Benacerraf 1965, 291)—. Según esta concepción, *ser* el número 2, por ejemplo, es ni más ni menos que estar precedido por el 1, y posiblemente por el 0, y seguido por el 3, 4, etc. Cualquier objeto puede jugar el papel de 2, es decir, cualquier objeto puede ser el segundo elemento en una progresión o secuencia ω. Esto recuerda inmediatamente al análisis del número de Dedekind, el cual se presenta como una caracterización de la *estructura* de los números naturales. En resumen, según Benacerraf, la aritmética no es una ciencia sobre objetos particulares; antes bien elabora la estructura abstracta que todas las progresiones tienen en común sólo en virtud de ser progresiones.

Por una parte, el argumento ontológico que Benacerraf ofrece no refuta la concepción de los números como objetos. Su opinión de que no pueden encontrarse objetos que sean realmente idénticos a los números naturales parece plausible sólo bajo la siguiente suposición: que la caracterización estructural sugerida por él proporciona todas las propiedades necesarias y suficientes de los números naturales, es decir, que no hay otra manera de caracterizar a los números que una estructural. No obstante, no ha mostrado esto en sentido estricto. Pues la plausibilidad de la tesis de que las propiedades estructurales establecidas sean suficientes para la caracterización de los números se debe al hecho de que hasta ahora no se hayan encontrado rasgos adicionales de los números. Lo que muestra el argumento ontológico de Benacerraf es sólo la imposibilidad de identificar a los números como determinados objetos a través de las condiciones que hasta ahora se pueden especificar. *Por otra parte*, todas las objeciones planteadas al argumento ontológico de Benacerraf adolecen de un defecto: no dan a conocer lo que podría decirse esencialmente sobre los números más allá de la caracterización estructural. A menos que alguien haya logrado refutar el argumento de Benacerraf, la concepción de los números como objetos sigue siendo un dogma que Frege nos dejó. Una discusión detallada de esta problemática aparecerá en mi artículo en preparación "Mathematical Platonism: Challenge and Defence".

BIBLIOGRAFIA

Los escritos de Frege se citan mediante abreviaturas:

CP: *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, comp. B. McGuinness, trads. M. Black *et al*,. Oxford, Basil Blackwell, 1984.

FA: *The Foundations of Arithmetics. A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*, trad. J. L. Austin, Oxford, Basil Blackwell, 1950, 1953.

GGA: *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*, volumen I, Jena, H. Pohle, 1893; vol. II, Jena, H. Pohle, 1903; reimpresión Darmstadt y Hildesheim, 1962.

GLA: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, W. Koebner, 1884, reimpresión Darmstadt y Hildesheim, 1961.

KS: *Kleine Schriften*, comp. I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1967.

NS: *Nachgelassene Schriften*, comps. H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach, Hamburgo, Felix Meiner, 1969.

PMC: *Philosophical and Mathematical Correspondence*, comp. B. McGuinness, trad. H. Kaal, Oxford, Basil Blackwell, 1980.

PW: *Posthumous Writing*, trads. P. Long y R. White, Oxford, Basil Blackwell, 1979.

WB: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, comps. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart, Hamburgo, Felix Meiner, 1976.

TF: *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, comps. y trads. P. Geach y M. Black, Oxford, Basil Blackwell, 1952, 1960.

Dummett, Michael (1973), *Frege: Philosophy of Language*, Londres, Duckworth.

Dummett, Michael (1981), *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Londres, Duckworth.

Dummett, Michael (1991), *Frege: Philosophy of Mathematics*, Londres, Duckworth.

Schirn, Matthias (1983), reseña de Dummett 1981, *Erkenntnis* 20, pp. 243-251.

ABSTRACT

Frege's principal scientific concern was to lay the logical foundations of number theory and analysis. He thought that for this purpose it was mandatory to establish not only the purely logical nature of the natural and the real numbers, but also their objectual status. It is a striking feature of Frege's conception of numbers as objects that it is based entirely on syntactic considerations. This applies notably to the strategy he pursues in his book *Die Grundlagen der Arithmetik* of 1884. In this paper, I want to examine critically some central aspects of Frege's objectual view of the natural or finite cardinal numbers in *Grundlagen*. In the first Section, I characterize briefly his syntactic criteria for regarding numerical expressions as singular terms. In the second Section, I scrutinize his proposed analysis of what he calls *ascriptions of number* [*Zahlangaben*]. The third Section is devoted to a problem which arises from the twofold role of a numeral. In the fourth Section, I focus on Frege's treatment of substantival and adjectival uses of number-words. In the fifth Section, I try to shed light on his requirement of representing ascriptions of number through numerical equations. I conclude with three remarks in the sixth and final Section.