LA CRITICA DE LOS MATEMATICOS FRANCESES A LA PRUEBA DE ZERMELO*

CARLOS GUSTAVO GONZÁLEZ

Introducción

Esquemáticamente hablando, los sistemas axiomáticos considerados en cuanto tales plantean dos tipos de problemas. Los primeros tienen que ver con los criterios utilizados para la elección de los axiomas; los segundos con los procedimientos mediante los cuales se obtienen los teoremas. Los logros del programa de Hilbert se vinculan casi totalmente con el segundo tipo de problemas, y esto debe haber sido la causa de que el formalismo más exacerbado se ocupe exclusivamente de las cuestiones referidas a la deducción, reduciendo todo el problema de la selección de los axiomas a una mera convención. Sin embargo, se pretende que los sistemas axiomáticos de la lógica y la matemática sean mucho más que un mero juego combinatorio de signos, por lo que las cuestiones sintácticas quedan subordinadas a las valoraciones semánticas y pragmáticas que se hagan de un sistema. Así, los criterios en base a los cuales se eligen los axiomas poseen la mayor importancia y deben ser suficientemente analizados y discutidos, como de hecho sucedió y sucede en las ciencias formales. Este artículo se ubica dentro de esta última posición y recurre para ello a la discusión más importante del siglo (y la segunda de la historia) en cuanto a aceptar o rechazar un principio: el caso del axioma de elección.

En 1903, si bien ya hacía algunos años que Frege había desarrollado una axiomatización de la lógica de predicados de primer orden, ésta aún no había tenido ninguna difusión. Los razonamientos de los matemáticos de aquel entonces seguían formas intuitivamente válidas, pues aún no existía la formalización de los razonamientos, ni se conocían signos como $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\Leftrightarrow$, tan comunes hoy en día. Para los fines prácticos de la matemática era como si la lógica matemática aún no existiera.

Por otra parte, teorías axiomáticas se conocen desde la antigüedad con ese gran paradigma que fueron los *Elementos de Geometría* de Euclides, pero por más de 2000 años no se formuló en matemática ninguna teoría axiomática que poseyese alguna importancia. Recién hacia fines del siglo pasado vuelve el trabajo de axiomatización, pues los logros de Grassmann,

* Quiero agradecer al prof. G. Klimovsky por la paciente labor llevada a cabo en los tres años del Seminario de Lógica en SADAF. La mayoría de las cuestiones tratadas en este artículo surgieron en conexión con los temas de ese seminario y con las ideas vertidas por el prof. Klimovsky.

Dedekind y Peano culminan en la primera teoría axiomática de la aritmética, hoy denominada "Aritmética de Peano". Por otra parte, en los trabajos de Weierstrass y Dedekind se encuentran formulados principios que luego van a ser axiomas de la teoría de los números reales.

En lo que respecta a la teoría de conjuntos, al abordar de una manera novedosa y fructífera el problema del infinito, Cantor realizó en el último tercio del siglo pasado las primeras formulaciones que se conocen. En matemática fácilmente nos encontramos con conjuntos infinitos: los números pares, los puntos de una recta, etc. A partir de problemas del análisis matemático, Cantor se cuestionó el tratamiento de los conjuntos infinitos de puntos y de números reales, llevando a cabo la primera teoría del infinito en matemática. Pero cabe destacar que no elaboró nunca una teoría axiomática de conjuntos. Por otra parte, Frege, tomando una posición claramente axiomatista, había desarrollado una teoría matemática formalizada. Pero tanto la definición cantoriana de conjunto como la teoría de Frege resultaron inconsistentes. Estos son los motivos por los cuales en 1903 no existe una teoría axiomática de conjuntos aceptable, y las pruebas se llevaban a cabo de una manera intuitiva. El proceder habitual era definir la propiedad característica de un conjunto con lo cual se pensaba que se podía afirmar la existencia del mismo. Se suponía además que ciertos conjuntos, como el de los números naturales, los reales, el plano euclidiano, etc., estaban bien definidos. También se utilizaban procedimientos semejantes a la unión, intersección y separación.

En esa época quedaban problemas matemáticos sin resolver, y uno de ellos era si el continuo podía ser bien ordenado. Por supuesto, el orden natural de los reales no es un buen orden, pero, ¿existirá alguna manera de reordenarlo que sea un buen orden? König pensaba que no,[1] y presentó una prueba de ello, pero la comunidad matemática no parecía estar muy convencida de la corrección de la misma. En este contexto, Zermelo publica su demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado. Habría, según la prueba, una manera de reordenar los reales de modo que fuera un buen orden.

La finalidad de este artículo es el análisis de la discusión que en torno de la prueba de Zermelo realizó un grupo de matemáticos franceses. Esta polémica comenzó con una breve nota de Emile Borel, quien había adherido de joven a las ideas de Cantor.[2] Luego se produjo un intercambio de

[1] Cf. Van Heijenoort, Jean, *From Frege to Gödel*, Boston MA, 1967, p. 139.

[2] Cf. Borel, E., *Selecta*, Jubilé scientifique, París, 1940. Además en un libro titulado *Leçons sur la théorie des fonctions* desarrolló algunos puntos de la teoría cantoriana de los conjuntos infinitos. La tercera edición de este libro reproduce las "cinco cartas" y otros materiales, por lo que se constituye en nuestra fuente principal. De ahora en más citaremos *Leçons* por Emile Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, París, Gauthier-Villars, 1928.

cartas entre Borel, Lebesgue, Baire y Hadamard, que se publicó con el título *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. Zermelo contestó a estas críticas en su segunda prueba de que todo conjunto puede ser bien ordenado, aparecida en 1908. Hubo de parte de los matemáticos nombrados algunos comentarios posteriores, pero por tornarse una mera repetición de posiciones anteriores, el debate pierde interés. Además ya comienza a perfilarse la polémica que surgiría poco tiempo después entre intuicionistas, formalistas y logicistas, con una conceptualización más importante tanto desde el punto de vista lógico como filosófico.

1. El axioma de elección y la prueba de Zermelo de 1904

Nuestra experiencia cotidiana se realiza con objetos y un modo de entenderla incluye el concepto de conjunto finito de objetos materiales. Por eso a partir de ella podemos tener un cierto conocimiento de los conjuntos finitos. Si intentáramos extrapolar dicho conocimiento a los conjuntos infinitos generalizando sin tomar ninguna precaución, caeríamos en contradicciones, pues las propiedades que valen para todo conjunto finito pueden no valer para los infinitos, hecho que denominaremos *la discontinuidad entre lo finito y lo infinito*. La semilla genial de Cantor fue dejar de lado algunas propiedades de los conjuntos finitos que impedían desarrollar una teoría consistente de los conjuntos infinitos y conservar otras.[3]

El principio de elección, en su primera forma intuitiva, dice que, dado un conjunto A, podemos realizar un número cualquiera de elecciones de elementos de A, sin expresar la ley por la cual elegimos. Si tomáramos un conjunto finito de objetos físicos se podría establecer una ley para la elección, como por ejemplo "tómese el objeto más liviano" (suponiendo que el peso de los objetos es distinto). Este modo de elegir nos va a dar un orden en el conjunto según el peso: el primero será el más liviano y el último el más pesado. Pero no es necesario que especifiquemos la ley de la elección. En efecto, bien podríamos haber dicho "tómense objetos arbitrariamente", e igual hubiera quedado una ordenación, pues uno de ellos (no sabemos cuál) habría quedado en primer lugar, otro en segundo, etc. Si sólo nos referimos a conjuntos finitos el principio de elección vale en

[3] Por ejemplo, dados dos conjuntos finitos A y B, si podemos establecer una correspondencia 1-1 (una biyección) entre A y una parte propia de B, entonces A tiene menos elementos que B, pero esto no vale para conjuntos infinitos. Por otra parte, si dados dos conjuntos finitos C y D podemos establecer una biyección entre ambos, entonces tienen el mismo número de elementos, hecho que puede ser extrapolado a conjuntos infinitos.

general. Pero por la discontinuidad que hemos visto no podemos extrapolar sin más ni más lo finito a lo infinito.

Si consideramos un conjunto no vacío A cualquiera, sabemos que hay algún x_1 que pertenece a A, pues esto significa "no vacío". Este x_1 sería el primer elemento que tomamos de A. Luego pasamos a considerar al conjunto $A - \{x_1\}$, y si es no vacío habrá algún x_2 que pertenezca a $A - \{x_1\}$. Luego, si $A - \{x_1, x_2\}$ es no vacío procedemos análogamente. Si A fuera finito este proceso acabaría en algún paso *n*. Si, por el contrario, A fuese infinito esto no sucedería, pero podríamos elegir una cantidad finita arbitraria de elementos de A, es decir, que A tendría subconjuntos de *n* elementos para cada número *n*. Por lo tanto, dado un conjunto infinito siempre podemos realizar un número finito de elecciones arbitrariamente.

Un proceder típico del pensamiento irreflexivo consiste en extrapolar, generalizar y razonar analógicamente sin tener ningún cuidado. Si así lo hiciéramos, generalizaríamos el procedimiento anterior a un número infinito arbitrario de elecciones. Esto sucede por el desconocimiento de la discontinuidad existente entre lo finito y lo infinito. Quien aún no se ha detenido a reflexionar en la cuestión suele tratar al infinito como un finito muy grande y confunde la posibilidad de obtener conjuntos arbitrariamente grandes de un tipo determinado con la posibilidad de obtener conjuntos infinitos.

Justamente siendo consciente de la discontinuidad existente entre lo finito y lo infinito es que Peano rechaza en 1890 el procedimiento que consiste en realizar un número cualquiera de elecciones, sin especificar la regla.[4] Pero a partir de Cantor[5] mismo muchos otros lo aplican implícitamente.[6] En efecto, Cantor ya había utilizado el siguiente procedimiento para bien ordenar un conjunto A: elegir arbitrariamente elementos de A hasta que no quede ninguno. De este modo, dado un subconjunto cualquiera B incluido en A, siempre habrá un primer elemento de B, pues será, en la elección de elementos de A, el primero que pertenece a B. Zermelo pensaba que los demás procedimientos no alcanzaban para probar que todo conjunto puede ser bien ordenado y decide introducir el principio de elección en toda su generalidad, permitiendo un número cualquiera de elecciones. Pero la prueba realizada por Cantor, que se denomina

[4] Peano, G., "Demostration de l'integrabilité des équations differentielles ordinaires", *Mathematische Annalen*, 37 (1890) 182-288, p. 210. A partir de ahora en lugar de *Mathematische Annalen*, citaremos *Ann*.

[5] Cf. el comentario de Zermelo en Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlín, 1932, p. 451.

[6] En este sentido quizá convendría tener en cuenta la distinción entre aquellos que lo mencionan, teniéndolo por un procedimiento más, como la unión o el conjunto de partes, y quienes no son conscientes de que están utilizando un procedimiento diferente.

por "elecciones sucesivas", no es considerada válida por Zermelo,[7] motivo por el cual recurre a un procedimiento más complejo, que pasamos a analizar.[8] Supongamos que se nos da un conjunto A cualquiera del que queremos probar la existencia de un buen orden. Entonces se postula que *hay una función f* cuyo dominio es P(A) y cuyos valores se dan en A, de modo que a cada subconjunto no vacío B incluido en A la función f le asigna un b perteneciente a B, *i. e.*, $f(B) = b$ con b en B. Una función de este tipo se denomina hoy en día una *función selectora*, pues para cada subconjunto de A *elige* un elemento del mismo. Contando con la función selectora procedemos del siguiente modo. Partimos de $A = A_0$, y como A pertenece a P(A) existe un a_0 perteneciente a A tal que $f(A) = a_0$. Luego consideramos $A_1 = A - \{a_0\}$, con lo que A_1 pertenece a P(A), de modo que nuevamente existe un a_1 perteneciente a A_1 tal que $f(A_1) = a_1$, con lo que podemos continuar tomando $A_1 = A - \{a_0, a_1\}$, etc., y de este modo obtenemos el orden $<a_0, a_1, ..., a_i, ...>$. Continúa Zermelo probando que lo que así se obtiene es un buen orden, es decir, que es un orden y que todo subconjunto no vacío tiene primer elemento. Dado un conjunto B incluido en A, el primer elemento de B según el orden descrito será el primer elemento de B que aparezca en la lista $<a_0, a_1, ..., a_i, ...>$. En esta prueba no formalizada se ve claramente el uso de la operación "partes de" y de la existencia de la función selectora. Se puede intuir algo semejante a la operación de unión para ir definiendo la lista y de separación para probar que todo subconjunto tiene primer elemento. La prueba en vistas a un sistema axiomático que realizó Zermelo en 1908 usa los axiomas de extensionalidad, pares, unión, potencia y elección.[9]

De las dos operaciones visibles, la de partes parece más intuitiva por lo que la prueba, en realidad, descansa sobre la existencia de la función selectora. Este hecho no pasa inadvertido para Zermelo, pues dice que la existencia (en general) de una función de tal tipo es un "principio lógico", necesario, por ejemplo, para probar que el número de elementos de una parte de un conjunto es menor o igual que el número de elementos del conjunto entero. Así, la primera formulación del axioma de elección es: dado un conjunto A existe una función f tal que a cada subconjunto B incluido en A le asigna un elemento de B.[10]

[7] *Ibid.*, nota 5.

[8] Lo que aquí veremos es una simplificación de la primera prueba que hizo Zermelo: Zermelo, E., "Beweis dass jede Menge wohlordnet werden kann", *Ann.*, 59 (1904) 514-516. Este artículo se citará "Beweis".

[9] Zermelo, E., "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", *Ann.*, 65 (1908) 107-128. De ahora en más se citará "Neuer". Trad. inglesa en Van Heijenoort; *op. cit.*

[10] Cf. p. 516 de "Beweis".

2. Existencia, definibilidad, decidibilidad

Aunque en la época que nos ocupa aún no se había desarrollado la lógica matemática, realizaremos aquí un análisis formal para darle un marco definido a ciertos problemas.

El problema de la existencia puede plantearse de una manera metafísica, tal como ocurre si discutimos, por ejemplo, la concepción platonista de la matemática. Pero también puede analizarse la existencia en un marco lógico, tanto sintáctica como semánticamente. La existencia de un ente matemático significa en términos semánticos que, dada una interpretación, dicho ente pertenece al universo de la interpretación. En este sentido la existencia está siempre relativizada a la interpretación. Cuando un matemático trabaja, tiene en mente, de una manera más o menos clara o confusa, un universo de objetos con determinadas relaciones, propiedades y transformaciones. A medida que su trabajo avanza, define nuevas propiedades, relaciones y operaciones. También se aclaran conceptos y se va coherentizando todo este gran mundo de significados abstractos, al descubrir incompatibilidades y consecuencias. El investigador matemático medio ve este proceso como una realidad independiente que va descubriendo, como si se tratara de un explorador geográfico, pero de un mundo fantasmagórico donde cuesta mucho trabajo saber qué son las cosas y qué propiedades tienen. A esta red de significados, a la que se suma alguna noción semántica de consecuencia lógica, la llamaremos el *modelo intuitivo* y a su definición semántica formal, generalmente incompleta, el *modelo pretendido* (*intended model*). En el trabajo normal del matemático, existencia significa pertenencia al modelo pretendido. En términos de modelo intuitivo la existencia generalmente depende de la claridad de las propiedades atribuidas al objeto: en cuanto se desconozcan éstos o sean muy confusos se dudará en atribuir o negar existencia a un objeto. También puede interpretarse en términos de construcción: una operación muy clara como la de sucesor en aritmética, permite fabricar nuevos entes.

Un problema típico de todas las ramas de la matemática es determinar si existe o no un ente con las propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Aquí pueden pasar varias cosas. En primer lugar, que se conozca un objeto determinado. Por ejemplo, ¿existe un número primo par? Sí, pues 2 cumple con ambas propiedades. En segundo lugar, puede ser consecuencia de otros supuestos que no exista tal objeto. En este caso, suponer la existencia de un objeto con las propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ es contradictorio con otros supuestos, por lo que muchas veces se utilizan pruebas por el absurdo: por ejemplo, se supone la existencia de un objeto con las propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y se llega a que no posee la propiedad P_1. Si esto no ocurre, el objeto en cuestión puede pertenecer al universo del modelo pretendido. En estos casos Hilbert tomó una decisión drástica: se puede afirmar la existencia del objeto en cuestión. Si no tomamos un supuesto tan fuerte quedan dos posibilidades: que pueda probarse la existencia de tal objeto a partir de los supuestos iniciales o que no pueda probarse que existe ni que no existe.

En un lenguaje formalizado la existencia depende de la verdad de una proposición de la forma $(Ex)\ \Phi(x)$, donde $\Phi(x)$ representa una propiedad. Una vez que los supuestos básicos han sido establecidos como axiomas en el lenguaje formalizado, el problema de la existencia se reformula en la cuestión de si $(Ex)\ \Phi(x)$ es o no teorema del sistema. Si no lo es, podría pasar que $\neg(Ex)\ \Phi(x)$ fuera teorema o que ni $(Ex)\ \Phi(x)$ ni $\neg(Ex)\ \Phi(x)$ sean teoremas y que la cuestión de la existencia quede totalmente indeterminada. Respecto de la solución hilbertiana recién mencionada, sólo sirve en algunos casos, como en geometría. En teoría de conjuntos existen fórmulas con significado intuitivo $(Ex)\ \Phi(x)$ y $(Ex)\ \Theta(x)$ que son incompatibles y que bajo algunos supuestos de consistencia, ninguna de las dos ni sus negaciones son teoremas.

El concepto de definibilidad sólo puede desarrollarse en relación con un lenguaje formal determinado. Dada una interpretación, que un objeto del universo de la interpretación sea definible quiere decir que existe una fórmula del lenguaje que sólo es satisfecha por dicho objeto. Esta fórmula representa una propiedad que sólo posee dicho objeto. La propiedad de ser un número primo par define al dos, y la de no poseer ningún elemento al conjunto vacío.

En teoría de conjuntos si es definible un conjunto, debe existir una fórmula $\Theta(x)$ que es satisfecha por todos los elementos del conjunto, y sólo por ellos. Tal $\Theta(x)$ representa una propiedad característica del conjunto. Si $\Phi(x)$ es la fórmula que define al conjunto a, entonces $(Ex)\ (y \in x \,.\, \Phi(x))$ es satisfecha por los elementos de a. Pero de aquí no se sigue que cada elemento de a sea definible. Por ejemplo $P(N)$ es definible, y una propiedad característica equivalente es "x está incluido en N", pero de aquí no se sigue que haya una fórmula definidora para cada conjunto de naturales.

La definibilidad es más interesante si en lugar de considerar una interpretación tenemos en cuenta los modelos de una teoría dada T. Si en cualquier modelo de una teoría de orden uno T tenemos un solo elemento que satisface una fórmula $\Phi(x)$, entonces $T \vdash (E!x)\ \Phi(x)$, con lo cual tenemos una versión sintáctica de la definibilidad. Que cada uno de los elementos de un conjunto sea definible, siendo $\Phi(x)$ la fórmula definidora de dicho conjunto, significa que para cada elemento b que satisfaga

(Ex) (y $\in$ x . Φ(x)) existe una fórmula Θ_b(x) que sólo es satisfecha por b. Dado un lenguaje L, una función es considerada definible cuando existe un término de L $t(x_1,..., x_n)$ que la representa. Que una función sea definible no implica que lo sean todos sus valores. Lo que sí podemos decir es que una función definible da valores definibles para argumentos definibles.

El tercer concepto que nos ocupa es el de decidibilidad. Un conjunto a es decidible si y sólo si dado cualquier objeto b tenemos un algoritmo que nos permite determinar en un número finito de pasos si b $\in$ a o si no b $\in$ a. En términos sintácticos, si en una teoría T, Φ(x) es la fórmula definidora de a y Θ(x) la de b, tenemos que T $\vdash$ (E!x) Φ(x) y T $\vdash$ (E!x) Θ(x). El conjunto a es decidible si tenemos un algoritmo que nos diga en un número finito de pasos si (Ex) (Ey) (Φ(x) . Θ(x) . x $\in$ y) es o no teorema de T. En las teorías axiomáticas de conjuntos usuales no existe un algoritmo de tal tipo.

Una función es calculable si y sólo si existe un algoritmo que nos da sus valores. Dada una teoría T, un término $t(x_1,..., x_n)$ representa una función calculable en T si y sólo si dados términos cualesquiera $\sigma_1,..., \sigma_n$ y δ sin variables libres, tenemos un algoritmo que permite decidir si $t(\sigma_1,..., \sigma_n) = \delta$ es o no teorema de T.

3. El carácter meramente existencial del axioma de elección

Se habla del carácter meramente existencial de una prueba cuando tenemos un teorema de la forma (Ex) Φ(x), pero no tenemos para ningún objeto a que satisfaga Φ(x) una fórmula Θ(x) que defina a *a*. Desde el punto de vista sintáctico, dada una teoría T tenemos T $\vdash$ (Ex) Φ(x) pero no tenemos un teorema (E!x) Θ(x), tal que T $\vdash$ (Ex) (Φ(x) . Θ(x)). El hecho de que el axioma de elección conduce a pruebas meramente existenciales está puesto de manifiesto en una de las primeras críticas que desató la prueba de Zermelo: la de Borel de 1904.[11] Dice Borel que dado un conjunto cualquiera M podemos considerar los siguientes problemas:

> A. Poner M bajo la forma de un conjunto bien ordenado.
> B. Dado un subconjunto cualquiera M' de M, elegir en M' de una manera determinada (pero además arbitraria) un elemento m' [...] esta elección deberá ser hecha para todos los subconjuntos M' de M.

[11] Borel, Emile, "Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles", *Ann.*, 60 (1905) 194-195. Este trabajo se citará "Remarques". Tomó difusión antes de su publicación, como lo prueban las fechas de algunas de las cartas que analizaremos.

Y agrega que es sabido que toda solución del problema A dará una solución del problema B. El mérito de Zermelo, según Borel, consiste en haber mostrado la recíproca: que dada una solución de B tenemos una de A. Pero no considera que exista una prueba de que todo conjunto puede ser bien ordenado, pues no acepta que siempre exista la función selectora de Zermelo. Dice que para resolver B "sería necesario dar un medio, al menos teórico, de determinar el elemento distinguido m' de un subconjunto cualquiera M' ". Y agrega que este problema "es de los más arduos, *si se considera, por ejemplo, el continuo*".[12]

Borel pone de manifiesto que la función selectora de Zermelo no está definida, sino que simplemente se postula su existencia. Supongamos que queremos bien ordenar los números reales. Según el principio de Zermelo existe una función que a todo conjunto de números reales le hace corresponder un número, pese a lo cual, fijado el ejemplo de tal conjunto el número que le corresponde queda totalmente indeterminado, pues la función no ha sido definida.

La alusión al medio "al menos meramente teórico" puede apuntar a no pedir demasiado, como por ejemplo la calculabilidad de la función. En particular, la polémica circulante en dicho tema hace suponer que se habían realizado grandes esfuerzos para definir un buen orden del continuo, pero inútilmente.

El tema retorna en la primera de las *Cinco cartas*, de Hadamard a Borel. Hadamard hace referencia a la distinción de un contemporáneo suyo entre una función que puede ser definida y una función que puede ser descrita, pero con un significado distinto del actual, pues "definida" hace referencia a la mera existencia. En tal sentido le dice a Borel: "Tú empleas correspondencias en las cuales constatas la existencia, sin poder ahora describirla". El sentido de "describir" es más ambiguo, oscilando entre la definibilidad de la función y la de cada uno de sus valores. Hadamard, por una parte, dice que Zermelo "no da ningún método de ejecutar *efectivamente* la operación de la cual habla", pero por otra dice que el problema es "saber si la correspondencia podrá alguna vez ser indicada de hecho".[13]

Este análisis de Hadamard nos muestra el desarrollo de una concepción totalmente extraña a la matemática anterior al siglo XIX: la de considerar la mera existencia sin que se pueda hacer alusión a un objeto determinado. La visión más concreta afirma que existe un objeto con determinadas características cuando se puede dar un ejemplo. Así, existe un nú-

[12] *Op. cit.*, 194.
[13] *Leçons*, p. 151.

mero primo par, porque el dos cumple con esta condición. La visión más abstracta puede, razonando, llegar a la afirmación de existencia sin conocer un ejemplo. Y esto último se repite una y otra vez cuando nos ocupamos de conjuntos infinitos. El tratamiento del infinito actual realizado por Cantor abrió la gran puerta a este tipo de razonamientos, pues los conjuntos infinitos no pueden ser indicados por extensión.

En la tercera de las cartas, Lebesgue expone claramente el problema: "¿Se puede demostrar la existencia de un ente matemático sin definirlo?" y aclara el sentido de "definir": "La palabra 'definir' tiene todo el tiempo el sentido de: nombrar una propiedad característica del definido". Este sentido es bastante similar al que hemos especificado en la sección anterior. Aclara luego que la respuesta a dicha cuestión obedece solamente a una convención y explicita que él toma un punto de vista similar al de Kronecker, contestando que no a esta pregunta. Aun más, exige no sólo la definibilidad de la función sino la de sus valores. Dado un subconjunto B de A, la función selectora "elige" un elemento $b \in B$, tal que $f(B) = b$ y en este sentido Lebesgue aclara: "empleo la palabra 'elegir' en el sentido de nombrar".[14]

En la cuarta carta Hadamard traza una divisoria de aguas, posibilitada por la discusión anterior. De un lado se ubicarían Lebesgue, Baire y Borel, los cuales, según Hadamard, habrían aceptado el punto de vista de Kronecker. Del otro lado se ubicaría Hadamard. El criterio para establecer la distinción son las dos respuestas posibles a la pregunta "¿Se puede demostrar la existencia de un ente matemático sin definirlo?". Hadamard responde que sí y por eso dice "que nos sea imposible, al menos actualmente, *nombrar* un elemento de este conjunto, coincido. He aquí una cuestión para ustedes; no lo es para mí".[15]

Un problema interesante es el suscitado por el hecho de que Borel y Lebesgue habían utilizado procedimientos en los cuales intervenían de alguna manera afirmaciones de mera existencia. Si se toma el punto de vista que homologa existencia y definibilidad, el único valor que puede poseer una prueba de tal tipo es el de indicio de una prueba efectiva. En realidad, la tosquedad de los métodos de prueba hacía que se rechazaran algunos principios en unas pruebas y se aceptaran los mismos en otras. Hadamard pide en este sentido que se sea consecuente. Borel contesta en la quinta carta que sus resultados son "absolutamente valiosos y que por lo tanto conducen a resultados efectivos" pero de hecho es sólo una expresión de deseos.[16]

[14] *Leçons*, pp. 154 y 155.
[15] *Leçons*, p. 157.
[16] *Leçons*, p. 159.

La discusión que acabamos de contar sirvió para que en su momento se aclarara bastante el problema de la existencia en teoría de conjuntos, y sentó dos concepciones de la existencia desde el punto de vista lógico, que desembocarían, una en el intuicionismo, otra en la concepción clásica.[17] Este parece ser el fundamento de que se catalogue a algunos de los autores que nos ocupan de "semiintuicionistas".[18]

Desde el punto de vista actual podemos decir que, si ZF es consistente, es consistente con ZF el suponer un buen orden definible para todo conjunto. En efecto, en 1938 Gödel formuló el axioma conocido como V = L, probando que si ZF es consistente, también lo es ZF + V = L, y es consecuencia de V = L que existe un buen orden definible del universo de los conjuntos.[19] En cambio, agregar sólo el axioma de elección a ZF tiene como consecuencia la posibilidad de modelos con conjuntos cuyo buen orden no es definible.[20]

4. El problema del sujeto

En las circunstancias de entonces, si bien por una parte una discusión puramente lógica era imposible, por el estado incipiente de la disciplina en lo que respecta al análisis del razonamiento matemático, por otra parte se evitaba la discusión puramente metafísica. Por eso es que, siendo la cuestión de la existencia el tema principal de la discusión, una y otra vez se la sitúa en un contexto gnoseológico, por lo cual el problema del sujeto es un subtema recurrente, presente siempre en la polémica, ya sea de una u otra manera. En efecto, tratar la existencia en sí misma sería metafísica, pero entonces considerar la existencia para nosotros es situarse muy cerca de la cuestión de cómo podemos saber que existe tal o cual ente matemático.

En primer lugar podemos considerar la siguiente pregunta: ¿qué características posee el sujeto? En los desarrollos teológicos de Cantor se diferencia entre la capacidad de conocer de Dios y la del hombre, pero ciertos procedimientos las homologan.[21] En particular si consideramos las elecciones sucesivas nos encontramos con que el hombre en un tiempo finito sólo puede realizar una cantidad finita de elecciones. Suponer,

[17] El intuicionismo rechaza también las pruebas de mera existencia, pero pidiendo que el ente en cuestión sea *construcible* en lugar de *definible*.

[18] Cf. Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, 1958, p. 205.

[19] Gödel, K., "The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24 (1938) 556-557.

[20] Cf. Devlin, K. J., *Aspects of Constructibility*, Berlín, Springer, 1973, LNM 334, p. 24.

[21] Cf. Hallett, M., *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford, 1984, p. 13.

como hace Cantor, un número infinito de elecciones sucesivas es exceder el poder de conocimiento del hombre. Este debe ser el motivo por el cual Zermelo rechaza el procedimiento cantoriano y propone, en lugar de las elecciones sucesivas, una función selectora que elige simultáneamente.

Para Borel postular la existencia de la función selectora es sólo una manera de ocultar "bajo el aparato lógico" el procedimiento de las elecciones sucesivas.[22] En contra de la concepción de que la lógica mostraría la dinámica pura de los conceptos, aquí hay una mera traducción de un procedimiento subyacente y oculto.

Para Hadamard no existe ninguna analogía entre las elecciones sucesivas, dependiendo cada una de ellas de las anteriores, y el procedimiento de Zermelo, en el cual son independientes.[23] Lebesgue, quien rechaza ambos procedimientos, duda frente a considerarlos homologables. Por una parte, el hombre sólo puede realizar un número finito de elecciones: "la vida es muy corta".[24] Pero por otra hay una simplificación del planteo: en oposición a Borel no sólo no sostiene que Zermelo no habría confundido más la cuestión, sino que realizó un "razonamiento simplista" reduciendo todo a una sola dificultad, sólo que muy grande: ¿existe la función selectora?[25]

Discutir en estos términos qué procedimientos son aceptables y cuáles no es determinar las capacidades del sujeto en matemática. En síntesis, el sujeto capaz de elegir sucesiva y transfinitamente de Cantor es inaceptable para todos. También coinciden en que todo hombre puede realizar un número finito de elecciones y esta capacidad debe estar presente en el sujeto de la matemática. Pero la posición es distinta frente a la pregunta ¿puede el sujeto de la matemática realizar un número infinito de elecciones simultáneas? En efecto, aquí las aguas se dividen en el mismo sentido que en la discusión "¿puede probarse la existencia de un ente matemático sin definirlo?", de modo que Zermelo y Hadamard contestan que sí y Baire, Borel y Lebesgue que no.

La conexión entre ambas preguntas es la siguiente. Si existencia implica definibilidad, entonces probar implica nombrar. Si aceptamos la realización de infinitas elecciones simultáneas estaríamos aceptando una prueba donde no se pueden nombrar los infinitos elementos elegidos, por lo que estaríamos probando la existencia de entes para los cuales no tenemos una definición.

[22] Cf. "Remarques", p. 195.
[23] Cf. *Leçons*, p. 151.
[24] Cf. *Leçons*, p. 156.
[25] Cf. *Leçons*, p. 155.

En términos metafísicos se puede ser platonista y sostener la existencia de entes matemáticos independientemente del hombre y por lo tanto de la capacidad humana de conocer. Si no se es platonista es porque de algún modo se hace depender del hombre la existencia de los entes matemáticos. En términos gnoseológicos la posición metafísica que se haya tomado determina un sujeto: más pasivo el del platonismo, en cuanto no modifica el cielo platónico; más activo el de las otras posiciones.

En términos de modelo intuitivo, tomar partido por una y otra posición no sólo modifica las nociones que se tengan desde el principio acerca de entes, relaciones, etc., sino que determina la lógica que le da coherencia a este mundo semántico. Este fue uno de los mayores aportes del intuicionismo, el cual, debido a la integridad que posee, mostró con un ejemplo histórico una posición metafísica, gnoseológica, matemática y lógica consecuente.

Este interrelación resulta clara en la posición de Hadamard pues dice que la descripción efectiva es una "pura cuestión de sentimientos", "fuera de las matemáticas". Agrega que "pertenece al dominio de la psicología y es relativa a una propiedad de nuestro espíritu; es una cuestión de esta naturaleza saber si la correspondencia empleada por Zermelo podrá alguna vez ser indicada *de hecho*".[26] Entonces, según Hadamard, lo propio de la matemática es establecer si existe o no la función en cuestión, mientras que la "descripción", es decir el problema de la efectividad, se remite al sujeto y a su capacidad para indicarla y conocerla.

Hadamard, con una visión platonista, acepta la existencia de la función selectora (y de las elecciones simultáneas) independientemente de nuestra capacidad de conocer. Luego, también independientemente de que podamos nombrar la función o definirla. Para Baire, Borel y Lebesgue la cuestión sería "pod*emos* ordenar", para Hadamard "*se* puede ordenar".[27] Borel califica la postura de Hadamard de "una pura abstracción metafísica, fuera de toda realidad científica".[28]

Borel acusa a Hadamard de "metafísico" por contraposición a científico. Hadamard a Borel de subjetivista por oposición a objetivista. Esto determina que la discusión sea a la vez gnoseológica y metafísica, porque en realidad se trata de ver si la existencia de los entes matemáticos depende del sujeto y en qué medida. Y en este sentido lo que eran dos concepciones de la existencia se tornan dos concepciones acerca del sujeto. Zermelo y Hadamard suponen un sujeto más poderoso, en cuanto reconocen

[26] *Cf. Leçons*, p. 151.
[27] *Cf. Leçons*, pp. 157 y 173.
[28] *Cf. Leçons*, p. 173.

procedimientos que Baire, Borel y Lebesgue rechazan. Esta discusión también influirá históricamente en el intuicionismo, el cual, por tener como un presupuesto un sujeto menos poderoso, deberá mutilar los métodos de prueba.

5. El orden como relación

Decir que un conjunto está ordenado es decir que existe una determinada relación[29] entre sus elementos, pero el concepto de relación sufrió una fuerte transformación entre 1900 y 1920, siendo este hecho mostrado parcialmente en la discusión que nos ocupa. Una relación puede ser entendida como un vínculo entre objetos no separable de éstos, o como un ente independiente.[30]

Si vinculamos esquemáticamente las concepciones platónica y nominalista con las relaciones, podríamos emparentar al nominalismo con una especie de atomismo donde las relaciones dependen de los individuos, en algún sentido anteriores. Por su parte, el platonismo se vincularía con algún tipo de estructuralismo, en el cual los individuos se limitan a ocupar los lugares vacíos previamente existentes por la red relacional. Llevando al extremo este análisis esquemático diríamos que, para una concepción primero son los objetos y las relaciones son algo dependiente de éstos, para la otra las relaciones son independientes y los objetos llenan una estructura previa.[31]

En lo que respecta a nuestro tema, en 1904 se concebía a las relaciones con un alto grado de dependencia de los objetos. En el caso particular del continuo, mientras que actualmente se consideran separadamente el con-

[29] Nuestro análisis se limitará a relaciones binarias.

[30] Para aclarar esto consideremos las visiones platónica y nominalista de las propiedades. La concepción nominalista suele expresarse diciendo que las propiedades no existen separadamente "antes de las cosas", ni "fuera del alma". Los hombres tenemos un concepto de belleza y decimos "este jarrón tiene una gran belleza", como si el jarrón y la belleza fueran entes separados, pero para la visión nominalista esto es sólo una "manera de hablar". Por otro lado, la concepción llamada platónica, realista o idealista sostiene que las propiedades tienen una existencia independiente anterior a las cosas. Inspirándose en Platón, considera, por ejemplo, la belleza como algo existente en sí mismo y anterior a las cosas. Este punto de vista se aleja en algún sentido del de Platón.

[31] En Bourbaki, N., *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza, 1972, se dice: "En lo referente a esto, ha sido sobre todo difícil conseguir librarse de la impresión de que los objetos matemáticos no son 'dados' *con su estructura*; ha sido necesaria una larga práctica del análisis funcional para hacer familiar a los matemáticos modernos la idea de que, por ejemplo, existen varias topologías 'naturales' para los números racionales, y varias medidas sobre la recta real. Con esta disociación se pasa finalmente a la definición general de estructuras" (pp. 38 y 39).

junto de objetos (los números reales) y su "orden natural", en aquella época tiende a verse como una sola cosa objetos y orden. En particular, las expresiones como "reordenarlos", "ponerlos en un orden semejante al de tal otro conjunto", etc., están señalando que debemos realizar dos procesos para bien ordenar los reales: primero abstraer el orden natural y considerar el conjunto de objetos. Luego considerar el buen orden.

Si concebimos a las relaciones como objetos entonces debemos hacerles corresponder objetos de nuestro universo de discurso. Si nuestro universo tiene conjuntos e individuos parece natural hacerles corresponder conjuntos. Históricamente Hessenberg les hizo corresponder conjuntos a los órdenes en 1909,[32] y en 1914 Hausdorff[33] da la concepción general de las relaciones como conjuntos de pares ordenados. Esto llevó a hacer lo mismo con los pares ordenados y en 1914 Wiener define $<a, b> = \{\{a, 0\}, \{b, 1\}\}$[34] y luego en 1921 Kuratowski da la definición actual $<a, b> = \{\{a, b\}, \{a\}\}$.[35] En esta conceptualización probar que determinado conjunto tiene una relación es probar la existencia de la relación.

Esta visión está expresada en una carta de Baire: "personalmente dudo de que pueda encontrarse alguna vez una medida común entre el continuo o lo que, en la especie, resulta lo mismo, el conjunto de todas las sucesiones de enteros positivos y los conjuntos bien ordenados. Hay aquí, para mí, dos cosas, las cuales no están definidas más que virtualmente, y es probable que las dos virtualidades sean irreductibles". Por una parte el continuo, y por otra los conjuntos bien ordenados, se conciben como si conjunto y orden fueran una sola cosa. Baire dice en el párrafo citado que no estamos hablando de entes reales, sino de entes virtuales que hemos definido con determinadas características, por lo que no estamos buscando tampoco un vínculo real entre el continuo y buen orden, sino la manera de reducir uno de estos entes virtuales al otro. En otras palabras, la existencia de una "medida común" nos llevaría, por ejemplo, a que la definición del continuo tuviera implícita la del buen orden, de modo que el continuo se pudiera "reducir" a un conjunto bien ordenado. Esto significaría algo así como transformar el orden del continuo en un buen orden, cosa que es considerada poco probable.

Hasta qué punto se considera como una sola cosa el conjunto de los reales y su orden natural lo muestra también la prueba que utiliza Borel

[32] Cf. Levy, A., *Basic Set Theory*, Berlín, 1979, p. 37.

[33] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[34] Wiener, N., "A Simplification of the Logic of Relations", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 17 (1914) 387-390.

[35] Kuratowski, K., "Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles", *Fundamenta Mathematicae*, 2 (1921) 161-171.

en su libro para mostrar que el continuo no es numerable. En lugar de recurrir a la prueba clásica de la diagonal, usa una prueba más complicada,[36] también de Cantor, en la cual figura el supuesto de que todo conjunto acotado de reales tiene supremo. Este principio, considerado imprescindible para la definición del continuo, no es utilizado en la prueba de la diagonal.

6. La formulación de axiomas

Esta discusión, al igual que otras generadas por la prueba de Zermelo, contribuyó en buena medida a la formulación axiomática de la teoría de conjuntos que realizaría Zermelo en 1908.

A mediados del siglo pasado, Boole desarrolla una teoría de clases con operaciones diádicas de intersección, unión y complemento, tratando de algebrizar el razonamiento, con las miras puestas principalmente en los silogismos. Un par de décadas más tarde, Cantor utiliza reiteradamente unión e intersección para familias infinitas.

En una carta de Cantor a Dedekind de 1899[37] figuran, explicitados como principios, unión, separación y partes. En otro sitio da un axioma equivalente al de remplazo.[38] Aunque esta carta no se publica hasta 1938, daría la impresión de que de algún modo los conceptos vertidos en ella tienen, en la época que nos ocupa, una pequeña difusión.

Pero en 1904 no hay ni principios explícitos utilizados en las pruebas, ni acuerdo sobre qué operaciones sobre conjuntos son aceptables, por lo que la prueba de Zermelo podía ser atacada en múltiples sentidos, como de hecho ocurrió. Es entonces interesante volver a ella para realizar un análisis más detallado, pues el desarrollo que se hizo en el apartado 1 estaba simplificado. Tal como vimos en la sección anterior orden y conjunto tendían a verse unificadamente, por lo cual Zermelo, en lugar de ir definiendo la secuencia $<a_0, a_1, \ldots, a_\alpha, \ldots>$ define una secuencia de conjuntos M_α bien ordenados, de modo que M_0 será el vacío, M_1 tendrá un elemento y la secuencia terminará con un M_β que coincidirá con A, el conjunto que se quería bien ordenar. En relación con la prueba del apartado 1, $M_\alpha = A - A_\alpha$. ¿Por qué existe M_β? En términos modernos $M_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha$ con usos de los axiomas de unión y remplazo, y la teoría cantoriana de los ordi-

[36] Cf. *Leçons*, pp. 12 y 13.

[37] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlín, 1932, p. 444.

[38] No es lógicamente equivalente, sino equivalente en presencia de los axiomas de la teoría de Zermelo, sin utilizar elección.

nales transfinitos. Un cierto uso implícito del axioma de unión es indicado en otra crítica fuera de nuestro tema. El axioma de remplazo, aunque preanunciado por Cantor, recién comienza a luchar por incorporarse a la teoría de conjuntos en la década del 20. De todos modos, no es necesario en esta prueba, hecho que sólo va a quedar claro mucho tiempo después, cuando se analicen las relaciones como conjuntos de pares ordenados.

Al definir $M_\alpha = A - A_\alpha$ estamos usando la operación de complemento. Aunque esta operación era generalmente aceptada en aquella época, hoy en día se la suele definir recurriendo a separación: $x \in M_\alpha \leftrightarrow x \in A$ & $\neg\ x \in A_\alpha$. Si bien la operación de separación era de uso general, se suele decir que su formulación como axioma es publicada por primera vez por Zermelo en 1908. Sin embargo Lebesgue dice en su carta que para Cantor "definir un conjunto M es nombrar una propiedad P perteneciente a ciertos elementos de un conjunto N previamente definido y caracterizando, por definición, los elementos de M".[39] Si recordamos la relación que tienen para Lebesgue definibilidad y existencia, esto es un postulado de existencia, con lo cual el axioma de separación habría sido publicado ya en 1905.

Pero tal como habíamos dicho, las dos operaciones visibles son la de partes y la de elección. A la segunda la hemos analizado en detalle y la discusión tratada sirvió para difundir en dicha época la idea de que se trataba de una operación independiente. A tal punto que Zermelo dice en 1908 que debe agradecer a Peano y a los matemáticos cuyos trabajos analizamos aquí por presentar evidencia a favor de la independencia del postulado de elección.[40]

En la concepción de Zermelo tres cosas son importantes en una formulación axiomática: a) que los principios sean lo suficientemente estrechos como para que de ellos no se deriven contradicciones; b) que sean lo suficientemente amplios como para rescatar todo lo valioso de la teoría de conjuntos; c) que sean independientes.[41] Lo último fue en cierto grado aclarado por la discusión analizada. En relación con la primera, Baire en su crítica expresa: "para mí todo lo que él [*i. e.* Zermelo] demuestra, es que no percibimos contradicción al concebir que, en todo conjunto que se nos defina, los elementos tengan entre sí relaciones de posición idénti-

[39] Cf. *Leçons*, p. 153.
[40] Cf. "Neuer Beweis", pp. 111 y 112.
[41] Cf. Zermelo, E., "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Ann.*, 65 (1908) 262-281, pp. 261 y 262.

cas a la de los elementos de los conjuntos bien ordenados".[42] Hadamard realiza el siguiente comentario respecto de esta frase: "no comprendo cómo Zermelo puede haber demostrado que no percibimos contradicción, etc. [...] Eso no se demuestra, sino que se constata: o se la percibe o no se la percibe".[43] La visión más prudente de Hadamard quiere seguramente tomar recaudos contra la incierta aparición de contradicciones futuras.[44]

Zermelo se ubica en la línea de Hilbert, quien para ese entonces había definido la posición de que podemos afirmar la existencia de un ente matemático con la sola condición de que no genere contradicciones *en un sistema dado*;[45] Hadamard dice que prefiere no situar el problema "a la manera de Hilbert, sobre el terreno de lo *no contradictorio*". Pero no puede dejar de asombrar la fundamentación, pues continúa: "que me parece aun que surge de la psicología y que lleva a tener en cuenta las propiedades de nuestro cerebro".[46] Difícil comprender esta observación si olvidamos el psicologismo que imperó en la lógica y la matemática del último tercio del siglo pasado. Según esta concepción la lógica estudia las leyes del pensamiento, pero en tanto que proceso cerebral, de modo que la fundamentación de los principios de la lógica y la matemática debía buscarse en la fisiología del cerebro. Los ecos de esta posición se escuchan en la *Philosophie der Arithmetik* de Husserl. Hilbert no fue psicologista ni en lógica ni en matemática, pero en 1904 su punto de vista se hallaba aún en camino de ser la concepción formalista madura. Pero para Hilbert en 1904, el poseer o no contradicciones es algo que corresponde a un sistema axiomático, sin tener en cuenta "las propiedades de nuestro cerebro". Sólo una atmósfera psicologista puede dar lugar a la mala interpretación de Hadamard, quien al querer erradicar la posición psicologista descarta también algunas consideraciones puramente lógicas.

Respecto del segundo de los requerimientos de Zermelo para los sistemas axiomáticos, nos encontramos con una difícil pregunta: ¿qué es lo "valioso" (*Wertvolle*) en teoría de conjuntos?

[42] Cf. *Leçons*, p. 152.

[43] Cf. *Leçons*, p. 157.

[44] Baire en la cita no está usando "demostrar" en un sentido estricto. Es como si a la prueba mal hecha de un alumno, el profesor se burlara: "usted no demostró el teorema, lo único que demostró es que no sabe".

[45] En este sentido había formulado con éxito su axioma de completud (*Vollständigkeitsaxiom*) en geometría: el dominio al cual se refiere la teoría debe ser lo más abarcante posible.

Aquí estamos frente a una discusión donde los principios son elegidos en base a sus consecuencias, como frecuentemente sucede en la ciencia empírica. En este sentido Russell dice: "Algunas premisas son mucho menos obvias que algunas de sus consecuencias, y se cree en ellas principalmente a causa de sus consecuencias. Se advertirá que esto sucede siempre cuando se presenta una ciencia como sistema deductivo. Las proposiciones lógicamente más simples del sistema no son las más evidentes ni las que proporcionan la parte principal de nuestras razones para creer en el sistema".[47] En este sentido la aceptación o rechazo de la función selectora y la discusión sobre la existencia en matemática es posterior al juicio de evidencia de ciertos teoremas y a la determinación de qué es "valioso" y qué no lo es en matemática. En efecto, en su libro Borel había utilizado un procedimiento por elecciones sucesivas para probar que todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable y luego cuestionó este procedimiento.[48] El eje de la aceptación o rechazo de la función selectora está determinado porque para Borel, Baire y Lebesgue el continuo no puede ser bien ordenado y de ahí proceden al análisis y la crítica de los procedimientos de prueba. Para Zermelo, y quizá para Hadamard, la cuestión del buen orden resulta indispensable para mantener la teoría cantoriana de los números transfinitos, y de ahí su aceptación que explicita al final del artículo citado: *el axioma de elección es necesario para formular la teoría cantoriana de los números cardinales*.[49] En particular es necesario para que los cardinales de dos conjuntos cualesquiera sean comparables, es decir que dados A y B, o bien el cardinal de A es mayor que el de B, o bien es menor o bien son iguales. Cantor usó implícitamente un principio equivalente al axioma de elección.[50]

Otra prueba de esto es que las críticas apuntan indiscriminadamente a uno u otro lado, hasta que al final de la discusión que tratamos toda la artillería pesada está dirigida contra la existencia de la función selectora. En este sentido debe interpretarse la crítica de Baire a la operación de

[47] Russell, B., "Atomismo lógico", en Ayer, A. J., *El positivismo lógico*, México, FCE 1965, p. 39.

[48] Cf. *Leçons*, pp. 12 y 13. Es cierto que en un primer momento intenta como defensa de su prueba el aceptar una cantidad numerable de elecciones y rechazar las que excedan este cardinal. Pero más tarde, seguramente influenciado por Hadamard, termina rechazando también la posibilidad de realizar una cantidad numerable de elecciones sucesivas. La última defensa que intenta de su prueba es acudir a la diferencia entre conjuntos simplemente numerables y conjuntos efectivamente numerables, pero la cuestión nada tiene que ver.

[49] Zermelo, E., "Beweis", p. 516.

[50] Cf. Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlín, 1932, p. 451.

partes, pues sostiene que partiendo del hecho de que "un conjunto esté dado", *"es falso para mí considerar las partes de este conjunto como dadas"*.[51] Es interesante señalar que aquí no se está criticando sólo la operación "tomar el conjunto de partes de A", sino que se está cuestionando también que si B está incluido en A se pueda siempre afirmar la existencia de B. Por ejemplo, podríamos sostener que no todo subconjunto de los naturales existe. Esto se puede relacionar con el problema de la definibilidad, puesto que no todo conjunto de los naturales es definible. Pero esta posición no triunfa por el uso constante que se hace de la operación "tomar el conjunto de partes" en matemática.

Vemos aquí que históricamente ocurrió lo siguiente: hubo una prueba, cuyo resultado no era aceptado por algunos y esto derivó en una discusión de los métodos de prueba, en la cual principalmente se trató de evidenciar cuáles eran los principios utilizados. Una vez puestos sobre el tapete algunos de éstos, esta labor se entronca con la posición de Hilbert de fundamentar la matemática dándole la forma de sistemas axiomáticos, con lo cual surge una importante pregunta: ¿cuáles son los criterios para elegir axiomas? Hilbert expresa claramente su posición en 1922: los principios deben ser "lo más simples, intuitivos y entendibles posible",[52] de modo que en la época que nos ocupa debería pensar algo similar. Zermelo en 1908 toma una posición diferente, criticando la evidencia como criterio y juzgando al principio de elección por sus consecuencias.[53] Hoy en día esta pregunta tiene respuestas muy complejas, que merecerían un tratamiento aparte. El análisis realizado aquí sirve como ejemplo histórico de lo que puede incidir para aceptar o rechazar un principio y de la complejidad de los problemas envueltos en una discusión de tal tipo.

7. Conclusiones

La discusión francesa sobre la prueba de Zermelo se ocupó fundamentalmente del problema de la existencia en matemática, dividiéndose en dos posiciones según la respuesta que se le dé a la pregunta ¿se puede demostrar la existencia de un ente matemático sin definirlo?, y durante este

[51] *Cf. Leçons*, p. 152. Bajo este presupuesto la prueba de Zermelo cae antes de que se cuestione lo que analizamos anteriormente. La crítica de Baire atenta contra el concepto mismo de buen orden, pues si en un buen orden todo subconjunto tiene primer elemento, necesitamos el conjunto de las partes. Tomando la posición de Baire, dado un conjunto A, no tiene sentido en general preguntarse si existe o no un buen orden sobre A.

[52] "*Möglichst einfachen, anschaulichen und fasslichen Prinzipien*", "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung" en Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, Berlín, 1970, p. 160.

[53] Gran parte del desarrollo de "Neuer" se encuentra en esta tesitura.

debate se aclaró el concepto de definibilidad, imponiéndose el sentido de "nombrar una propiedad característica".

Este análisis lógico deriva frecuentemente en un análisis gnoseológico sobre si el sujeto tiene o no ciertas capacidades, como la de realizar una cantidad infinita de elecciones. Esto se relaciona con lo anterior y se forman nuevamente dos posturas. El análisis gnoseológico de una de estas corrientes se desarrollará posteriormente hacia el intuicionismo, volviendo al plano lógico como limitación de los métodos de prueba aceptables.

Desde el punto de vista histórico, en primer lugar se ve que el concepto de orden (y en general el de relación) es menos abstracto que el actual, en tanto que se suele ver al conjunto ordenado como una sola cosa, mientras que ahora la definición habitual es de un par formado por un conjunto y un orden. En segundo lugar, la discusión llevada a cabo fue importante para la formulación axiomática que hizo Zermelo en 1908.

En general, se ve que frente a la concepción sintáctica de "axioma" existe otra que valora si algo merece ser axioma en base a discusiones semánticas y filosóficas.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS-CNPQ

ABSTRACT

Zermelo's 1904 proof that every set can be well-ordered was, immediately afterwards, subjected to a number of criticisms. In particular, mathematicians of the French School, namely Borel, Lebesgue, Hadamard and Baire, exchange letters discussing the acceptability of Zermelo's proof. We aim to show, by a historical and philosophical approach, the importance of this discussion in clarifying the concept of set, and the methods of proof in Set Theory. We also analyze other, related questions, such as the role of the subject in mathematics.