

NOTAS SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL REALISMO EN EL PENSAMIENTO DE G. CANTOR

MARÍA J. FRÁPOLLI

El propósito del presente artículo es dilucidar cuál fue la concepción de la existencia de los objetos abstractos que Cantor mantuvo y cómo evolucionó a lo largo de su obra.

Cantor es conocido por ser el creador de la teoría de conjuntos y por haber tratado por primera vez con rigor el tema de las multiplicidades infinitas. El origen de la teoría de conjuntos se encuentra en las aventuras de Cantor con el infinito y éstas no hubieran podido darse sin dos actitudes filosóficas que subyacían al pensamiento del autor: el actualismo, *i. e.*, la aceptación del infinito en acto y el realismo, ambas íntimamente unidas. Aquí me ocuparé sólo de la segunda.

1. ¿Qué significa ser realista?

El término "realismo" es un término ambiguo que puede utilizarse en contextos distintos y en cada uno de ellos adquiere un significado especial. Los dominios más comunes en los cuales se suele hablar de realismo son cuatro: 1) se llama realismo a una determinada postura respecto de la existencia de los *universales*, postura que afirma que éstos existen no sólo con independencia de nuestra voluntad sino también "separados" de nosotros, en un mundo aparte. Este tipo de realismo se opone al nominalismo y al conceptualismo. 2) También se utiliza el término "realismo" para hacer referencia a un determinado punto de vista acerca de la existencia de los objetos del mundo. En este sentido el realismo afirma que los objetos físicos existen independientemente de nosotros, que no son un sueño de los seres humanos y que si nosotros dejásemos de existir no se verían afectados. 3) A veces se llama realismo a la postura epistemológica que sostiene la posibilidad del conocimiento objetivo, del conocimiento del mundo "tal como es". Este tipo de realismo se opone a la tesis idealista de que el sujeto del conocimiento estructura la realidad de acuerdo con sus categorías, categorías de las que no puede desprenderse. 4) Por último, se utiliza el término "realismo" en el contexto de la teoría de la verdad y en este contexto nos moveremos en el presente trabajo. El tipo de realismo que nos interesa aquí es el que tiene que ver con la cuestión ¿qué significa que una oración sea verdadera? Cuando la oración aludida trata de objetos físicos de tamaño medio como:

(i) Hay cervezas en la nevera,

lo que significa suele estar bastante claro para la mayoría de la gente, excepto quizá para algunos filósofos, a saber, que si queremos beber una cerveza podemos tomarla de la nevera, o que si abrimos la nevera veremos algunas botellas de cerveza, etc. La teoría que suele aceptarse como la que explica el sentido de este tipo de oraciones de forma más simple y satisfactoria es la teoría de la verdad como correspondencia.

Pero los problemas se agudizan enormemente cuando la oración pertenece al ámbito de las ciencias formales, como es el caso de la teoría de conjuntos o de la aritmética, por ejemplo:

(ii) Hay un número cardinal mayor que todos los enteros finitos

o, simplemente,

(iii) Hay números.

El enunciado (ii) es verdadero para todo el que acepte números infinitos, (iii) es verdadero para todo el mundo, aunque la diferencia no es muy importante para el tema que nos ocupa. La diferencia entre un realista respecto del discurso abstracto y un no realista es que el primero piensa que (i), (ii) y (iii), si son verdaderos, lo son por las mismas razones. Y suele aceptarse por tanto una teoría de la verdad como correspondencia también en estos casos. En mi opinión, cuesta trabajo creer que la solución al problema de la existencia de los objetos abstractos se encuentre en la dicotomía de Carnap (1950) entre cuestiones de existencia internas o externas ya que ésta califica a las preguntas acerca de la existencia bien de triviales, bien de sin sentido, con lo que huelga toda discusión acerca de ellas. De aquí se desprende que si sólo puede preguntarse con sentido la existencia interna, entonces los sistemas formales no tienen más freno que la coherencia ni más justificación que su fecundidad. Pero en mi opinión la propuesta de Carnap, aunque muy interesante, oculta el verdadero problema que no es si hay números sino más bien qué queremos decir cuando calificamos a unas oraciones de verdaderas y a otras de falsas. Se puede contestar que queremos señalar que tenemos pruebas de unas y no de otras, pero esto no elimina la pregunta ya que aceptamos como verdaderas oraciones no demostradas e incluso no demostrables, y aun en el caso de las oraciones demostradas habría que aclarar la relación entre verdad y prueba.

Las tesis que, en mi opinión, definen el realismo en el contexto de las ciencias formales son, además de 1) la asunción de la teoría de la verdad como correspondencia, ya señalada, 2) que el valor de verdad de los enunciados es independiente de nuestro conocimiento del mismo y 3) que determinadas proposiciones (ideas) acerca de la realidad se nos imponen de alguna manera. Veámoslas con algo más de atención:

1) Que el realista acepta algún tipo de teoría de la verdad como correspondencia es obvio; ha sido señalado por Benacerraf (1973) como un rasgo de lo que él llama "la concepción estándar" y constituye una de las ventajas del realismo por su simplicidad intuitiva. Que la formulación precisa de la teoría de la verdad relevante sea la de Tarski está en mi opinión mucho menos claro. Esta última define la relación semántica de satisfacción entre dos polos que son, por un lado, un lenguaje formal y, por otro, un modelo. Ambos polos están previamente definidos y son conocidos, por lo que el tratamiento de la verdad es de algún modo interno a un sistema. Cuando se habla de la verdad de los enunciados de la teoría de conjuntos, o de la aritmética etc., no disponemos de nada que pueda hacer el papel de modelo, no conocemos los objetos a los que refieren los términos ni las relaciones que tienen entre ellos, y ésta es una de las dificultades que el realista debe resolver.

2) Otra tesis realista ampliamente admitida es que nuestro conocimiento del valor de verdad de un enunciado no influye en aquél. En esto se diferencia el realismo de las concepciones epistémicas de la verdad que consideran como criterios de la misma las razones que tenemos para aceptar o rechazar un enunciado. Como E. Sober (1982) ha afirmado, "el realismo es una declaración de independencia",¹ aunque precisar a qué equivale tal declaración no es tarea fácil. Para empezar, Sober argumenta que no puede darse una doctrina de la independencia concerniente a toda proposición, esto es, que toda afirmación del tipo

(A) Para cualquier sentencia S, el valor de verdad de S es independiente de α ,

donde α puede ser sustituida por expresiones tales como "nuestro conocimiento", "el pensamiento humano", etc., es falsa ya que S podría ser una sentencia que versara acerca de nuestro conocimiento, o del pensamiento humano, etc. (A) podría refinarse hasta hacerse más aceptable pero no por ello dejaría de tener problemas, sobre todo sí, siguiendo a

¹ Sober, E. (1982), p. 369.

Kripke (1975), abandonamos el enfoque sintáctico de resolver las paradojas propio de Tarski. Kripke ha mostrado suficientemente que los criterios formales son inadecuados y Sober añade que, en su opinión, la solución de Tarski no encaja con el realismo. Su argumentación es, a grandes rasgos, como sigue: una adecuada formulación de la declaración de independencia realista debe de pasar por la caracterización de una relación semántica *R* que las oraciones mantienen con la realidad. Esta relación tiene que cumplir la condición de que no todas las oraciones verdaderas estén en *R* con la misma cosa a fin de evitar que todo esté relacionado con todo; en caso contrario no hay independencia posible. Para Sober el holismo y el realismo son incompatibles. Sin embargo, como es sabido, según las tesis tarskianas una oración verdadera es satisfecha por cualquier secuencia y, así, toda oración verdadera está en la relación mediante la que se define la verdad —en este caso, la satisfacción— con la misma cosa, a saber, la totalidad de las secuencias. No basta, por tanto, la “declaración de independencia”, hace falta además llenarla de contenido.

3) El tercer rasgo definitorio del realismo que he señalado es que el realista considera que la realidad se le impone. En este sentido, se subraya de nuevo el paralelismo entre el conocimiento de la realidad empírica y el de la “realidad abstracta”. De la misma manera que no podemos cambiar a voluntad las leyes que gobiernan el universo físico, tampoco podemos hacerlo en el caso de contextos no espacio-temporales; la realidad física se enfrenta a nosotros y lo mismo ocurre con la “realidad abstracta”. Lo dicho no significa necesariamente que el realista sea un empirista ingenuo en epistemología, sino que más bien defiende que, sea cual sea la forma en que tenemos que contar con la naturaleza a la hora de edificar las teorías de las ciencias naturales, la misma se aplica a las ciencias llamadas “formales”. Este tercer rasgo realista ha sido expresado con mucha claridad por Gödel (1944) y (1947).²

Como en los dos casos anteriores, también con esta tercera tesis aparecen problemas de difícil solución, el principal de los cuales es el epistemológico. El problema epistemológico con el que se enfrenta el realista es de sobra conocido y fue muy bien retratado por Benacerraf (1973): el realista necesita que su conocimiento de los objetos abstractos siga las pautas del conocimiento empírico pero falta la facultad paralela a la evidencia empírica. Se acepta una teoría causal del conocimiento empírico pero no sabemos cómo comenzaría la cadena causal del conocimiento abstracto. Los realistas suelen suponer la existencia de algún tipo de con-

² Gödel, K. (1944). p. 310 y (1947). p. 359.

xión supraempírica entre nosotros y los objetos de conocimiento pero hasta el momento poco se ha dicho de ella más allá de su mera postulación. Gödel, por ejemplo, afirma:

Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos.³

Sin embargo, no profundiza en cómo podría ser tal percepción. P. Maddy (1980) se ha ocupado de este problema y ha conectado modernos resultados de la neurofisiología con la percepción de objetos abstractos supuesta por Gödel. Pero la solución final aún está lejos.

He señalado las afirmaciones más básicas que definen el realismo a mi modo de ver y he intentado poner de manifiesto sus dificultades. Pero el realismo también tiene muchas ventajas —si no, no se hablaría tanto de él—, y la principal es que permite que el predicado “verdadero” mantenga su sentido en todos los contextos. Así, entendemos, al menos intuitivamente, qué significa que un enunciado de la teoría de conjuntos es verdadero por analogía con otros contextos más elementales a pesar de las dificultades concretas que podamos hallar a la hora de descubrir o comprobar su valor de verdad. El hecho de que el realismo tenga dificultades no nos obliga a rechazarlo, ya que las filosofías alternativas no están de ninguna manera libres de ellas. Las dificultades, no obstante, son responsables de que no haya una absoluta homogeneidad en lo que los realistas sostienen e incluso de que puedan distinguirse distintos niveles de realismo de acuerdo con la fuerza que uno ponga en la idea de independencia, como ha hecho P. Horwich (1982).⁴ Pero creo que en la inmensa mayoría de los casos se pueden reconocer los rasgos que he indicado anteriormente.

³ Gödel, K. (1947), p. 359.

⁴ Paul Horwich ha distinguido tres niveles o estadios que interpretan con creciente intensidad el significado de la idea asociada con el realismo de que los objetos en cuanto a su existencia son independientes del sujeto del conocimiento. El primer estadio, el menos elaborado y el menos comprometido, es lo que él denomina *realismo epistemológico* que consiste en la mera afirmación de la existencia de determinadas entidades teóricas pero sin tener una teoría que especifique el tipo de existencia que se supone que tienen tales entidades. El segundo estadio coincide con lo que aquí hemos entendido por realismo. Él lo llama *realismo semántico*. Y, por último, un tercer estadio, al que denomina *realismo metafísico*, que se caracteriza por la tesis de que la verdad es una propiedad indefinible y primitiva de ciertos enunciados que no queda suficientemente explicada por la condición de adecuación material de Tarski. Horwich sostiene que se puede ser realista semántico sin ser realista metafísico.

2. ¿Fue Cantor un realista?

Me propongo ahora mostrar que Cantor mantuvo un punto de vista realista en el sentido de que asumió las tesis que he señalado como características de tal filosofía. Estas tesis han sido distinguidas aquí por mor de la claridad, pero en realidad están tan fuertemente relacionadas que deberían considerarse más bien como la misma afirmación vista desde tres perspectivas.

A veces se usa el término "platonismo" como sinónimo de "realismo". En el presente trabajo quisiera distinguir entre ambos y reservar la calificación de platónica para aquella posición que añade a los rasgos realistas los dos siguientes: a) se afirma explícitamente que los objetos abstractos *están* en algún lugar y b) éstos son de algún modo *más reales* que los objetos físicos.

El caso de Cantor es un caso curioso. Está ampliamente aceptada la idea de que fue un realista, pero al mismo tiempo no es infrecuente leer que su concepción de la existencia de los objetos abstractos es la ausencia de contradicción, e incluso algunos de los mayores especialistas en el pensamiento del creador de la teoría de conjuntos hablan del formalismo de Cantor, y entre las afirmaciones más conocidas del autor destaca la de que la esencia de la matemática radica en su libertad. Un panorama bastante confuso del que es responsable en gran medida el propio Cantor. El matemático centroeuropeo escribió muy poco sobre su concepción de la existencia de forma explícita —lo único un párrafo de (1883) y algunas cartas— y, lejos de aclarar nada, estas pocas líneas oscurecen aun más la cuestión. Está claro, sin embargo, que su postura no fue estable a lo largo de su vida.

Es conveniente distinguir en el realismo del autor dos niveles: el primero es el contexto de la aritmética y en general el de los objetos abstractos para cuya definición no se requieren colecciones infinitas en acto de otros objetos; el segundo es el contexto del análisis y de la teoría de números transfinitos, porque tanto los irracionales como los números infinitos se definen recurriendo a conjuntos actualmente infinitos. Respecto del primer nivel Cantor fue realista siempre. Consideró a los números naturales como objetos independientes como lo prueba una de las tesis de su (1869):

Los números enteros y los cuerpos celestes forman en cierto sentido un todo regido por leyes y relaciones semejantes.⁵

⁵ Cantor, G. (1966), p. 62.

En lo que se refiere al segundo nivel, su posición varió desde un formalismo que consideraba sólo como signos a lo que más tarde serían números irracionales y transfinitos hasta un realismo con todas sus consecuencias y la transición de uno a otro tuvo que pasar obligatoriamente por la definición precisa de la noción y las características de los conjuntos infinitos en acto y por la disolución de las ideas desconcertantes que anteriormente estaban unidas a ellos. Con el actualismo, la diferencia entre los dos niveles señalados pierde su razón de ser. El período de realismo completo se inaugura en (1883).

2.1. Del formalismo al realismo

Aunque el nombre de Cantor se suele relacionar con la creación de la teoría de conjuntos y números transfinitos, sus primeros trabajos están dedicados a tópicos matemáticos menos originales. En (1872) ofrece Cantor una definición del límite con el propósito de caracterizar el dominio de los números reales.⁶ La idea del autor es asociar con una determinada serie de números racionales un signo que indica que la serie cumple la propiedad de que la diferencia entre dos de sus miembros $\alpha_n + \frac{1}{n}$ y α_n puede hacerse menor que cualquier número racional ε conforme crece n .⁷ Al signo en cuestión lo llama "el límite de la serie de racionales", pero de la exposición de Cantor se desprende que no se está comprometiendo con la existencia de objetos que son límites sino que subraya que la expresión "tener un límite" es otra forma de decir que la serie de racionales se comporta de tal-y-cual modo señalado. La definición cantoriana de "tener un límite" es en mi opinión un ejemplo de lo que Frege llamó *definición constructiva* o *definición propiamente dicha*.⁸ De acuerdo con la caracterización fregeana, una definición no es un enunciado esencial en un sistema, todo pensamiento que puede expresarse mediante la definición puede expresarse sin ella, la definición sirve para simplificar el cálculo dentro de una teoría. Para Cantor la expresión "tener un límite" es una abreviatura para expresar propiedades de otros objetos que también pueden expresarse sin echar mano de límites aunque de forma más complicada. Esto es, el discurso acerca de límites puede reducirse al discurso acerca de racionales, mientras que el discurso acerca de racionales es irreduc-

⁶ Cantor no estaba de acuerdo con las definiciones de números irracionales anteriores a él, ya que consideraba que suponían la existencia de tales números sin haberla probado previamente.

⁷ Cantor, G. (1966), p. 93.

⁸ Frege, G. (1914), pp. 86 y ss.

tible. Esto último subraya otro de los rasgos del realismo: si se es realista acerca de determinados objetos, por ejemplo racionales, el discurso acerca de ellos no puede sustituirse por un discurso en el que no aparezcan los términos que los nombran. Por esta razón Cantor no llama números a los límites, cosa que sí hace con los racionales que sirven para definirlos, sino que para referirse a límite utiliza el término "signo" (*Zeichen*).

Algo similar ocurre cuando se introducen por primera vez las derivadas de orden infinito.⁹ Estas se definen perfectamente mediante las operaciones de derivación a partir de un conjunto de puntos dado y de la intersección de infinitos conjuntos de puntos. Cantor habla así de la primera derivada $P^{(1)}$ de un conjunto de puntos P , de la segunda $P^{(2)}$, de la n -ésima $P^{(n)}$ y también de la primera derivada de orden infinito $P^{(\infty)}$, de la segunda $P^{(\infty+1)}$, etc.; pero estos últimos signos " ∞ ", " $\infty+1$ ", " $\infty+2$ ", etc., no tienen todavía un significado autónomo. Cantor los llama "símbolos de infinitud" (*Unendlichkeitssymbole*). Mientras que los signos utilizados para señalar los órdenes de las derivadas finitas son números, los de las derivadas infinitas no lo son aún, como queda patente en el siguiente texto:

Si P es un conjunto de puntos no numerable, entonces P^∞ también es no numerable, tanto si α es un número entero finito, como también si es uno de los símbolos de infinitud.¹⁰

Por esta razón podemos denominar al período que va desde los primeros escritos del autor hasta (1883) *etapa formalista*, teniendo en cuenta que el formalismo sólo puede afirmarse respecto de la existencia de lo que luego serán los números irracionales y los transfinitos. Estos últimos son para Cantor, en cierto sentido, irracionales por su forma de definición.¹¹ No puede afirmarse, sin embargo, respecto de los números enteros finitos, acerca de los cuales fue siempre realista como ya he indicado.

⁹ La primera derivada P' de un conjunto infinito de puntos P es el conjunto de los puntos de acumulación de P . Si P' es infinito, puede tener a su vez derivada que será la segunda derivada de P , P'' . Este proceso puede seguir indefinidamente. Si para todo número finito n , P tiene n -ésima derivada, esto es, si P tiene todas las derivadas de orden finito, puede definirse entonces su primera derivada infinita P^∞ que es la intersección de todas las derivadas finitas. Esta última puede tener a su vez derivada, el conjunto de sus puntos de acumulación, y así sucesivamente.

¹⁰ Cantor, G. (1966), p. 160.

¹¹ Cantor, G. (1966), p. 395 y p. 406.

Como en otros tópicos dentro de la obra cantoriana, también en la concepción de la existencia marca (1883) una frontera con los escritos anteriores. Esta obra inaugura no sólo el período de interés conjuntista del autor sino también, lo que ahora nos interesa, lo que llamaré su *etapa realista*.¹² Al comienzo de (1883) Cantor advierte que para poder continuar las investigaciones conjuntistas iniciadas a propósito de los conjuntos de puntos ha de separarse de las concepciones habituales acerca del número y del infinito. En relación con este último la novedad introducida por él consiste en la clara distinción entre infinito potencial o impropio e infinito actual o propio y la aceptación sin reservas de éste. Respecto de la concepción tradicional del número la originalidad de Cantor estriba en la extensión del concepto de número entero a la esfera de lo infinito, de modo que tras la serie conocida de los números enteros infinitos asume la existencia de una sucesión de números enteros infinitos tan precisamente definidos y determinados como los números finitos. La introducción de los números infinitos presupone la asunción del infinito actual, y en este contexto escribe Cantor:

En la primera forma, como infinito impropio [el infinito matemático] se presenta como un *finito variable*; en la otra forma, en la que yo lo llamo infinito propio, aparece como un infinito completamente *determinado*. Los números enteros reales infinitos [*Die unendlichen realen ganzen Zahlen*], que definiré a continuación y hacia los cuales fui llevado hace ya una larga serie de años sin ser claramente consciente de tener en ellos números concretos de significado real [*in ihnen konkrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen*], no tienen en absoluto nada en común con la primera de estas dos formas, con el infinito impropio [...]; pertenecen por tanto a las formas y afecciones del infinito propio.¹³

A mi modo de ver, el texto citado muestra la conversión del autor desde una posición no comprometida con la existencia de los "símbolos de infinitud" a otra en la que estos símbolos vacíos adquieren el estatuto de verdaderos numerales. Se desprende de lo dicho que sea cual sea la concepción de la existencia de los números para Cantor, ésta será la misma sin importar que se trate de números finitos o infinitos. La conversión realista alcanza también, como es natural, a los números irracionales, de los cuales afirma el autor en (1883)¹⁴,

¹² P. Jourdain incluye a (1883) en la etapa formalista en su introducción a la edición inglesa (1955), p. 70.

¹³ Cantor, G. (1966), p. 166.

¹⁴ Cantor, G. (1966), p. 185.

que pueden determinarse con la misma precisión, evidencia y claridad que los números racionales. De nuevo ocurre lo que con los números enteros, que, sea el que sea el estatuto ontológico de los números racionales, de él participan también los irracionales, a diferencia de lo que Cantor creía en (1872). En este texto se sugiere también la idea realista de que los objetos abstractos se imponen a nuestro pensamiento independientemente de nuestros deseos o nuestras intenciones. A partir de (1883), Cantor se mantendrá fiel a las tesis realistas acerca de la existencia matemática.

2.2. La concepción de *Grundlagen*

Como he indicado, la conversión a una posición completamente realista se produce en (1883) y en esta obra aparece la única discusión explícita que acerca de la existencia publicó Cantor. Sin embargo, las opiniones vertidas en ella no contribuyen a despejar las ideas que tuvo el autor sobre la cuestión.

En (1883)¹⁵ Cantor distingue dos maneras en las que pueden existir los objetos abstractos en general, y los números transfinitos en particular. La primera de ellas, a la que llama *existencia inmanente*, es la que tienen aquellos objetos para los cuales tenemos una definición precisa por medio de la cual pueden diferenciarse claramente de otros objetos del mismo tipo. Así, el que un objeto tenga existencia inmanente se opone a que sea una pura fantasía subjetiva o una invención injustificada. Cantor se expresa de la siguiente manera:

Podemos considerar hasta aquí reales [*wirklich*] a los números enteros, cuando ocupan un lugar completamente determinado en nuestro entendimiento sobre la base de la definición, [cuando] se diferencian óptimamente de todos los demás componentes de nuestro pensar, [cuando] están con ellos en determinadas relaciones y por consiguiente modifican el estado de nuestro espíritu de una forma determinada.¹⁶

Es decir, un objeto existe inmanentemente si está bien definido y pertenece a un sistema trabado en el cual se diferencia del resto de los objetos y pueden determinarse con claridad las relaciones que mantiene con ellos. Por la forma en la que Cantor se expresa diciendo, por ejemplo, que los números están en cierto sentido "en nuestro entendimiento" o

¹⁵ Cantor, G. (1966), pp. 181-3.

¹⁶ Cantor, G. (1966), p. 181.

que "modifican el estado de nuestro espíritu", podría pensarse que el autor adhiere aquí a una posición psicologista. P. Jourdain, entre otros, mantiene esta opinión,¹⁷ aunque, creo, injustificadamente. Cantor considera que los números preexisten a nuestro conocimiento, que se descubren y por lo tanto, a pesar de la desafortunada manera en que se expresa, no hay razón para llamarlo psicologista.

La segunda forma de entender la existencia de los objetos abstractos en (1883) es la siguiente: un objeto, un número por ejemplo, existe si es un correlato de objetos o conjuntos de objetos que existen en el mundo físico. Así, los números ordinales indican el orden que tienen entre sí los elementos de un conjunto, los números cardinales el tamaño de los conjuntos, etc. A este tipo de realidad la llama el autor *existencia transubjetiva o transiente*. En este sentido afirma que los *alef* son representantes de tamaños que de hecho ocurren en la naturaleza puesto que Cantor cree, aunque no lo dice en este lugar, que hay \aleph_0 átomos materiales en el universo y los átomos de éter forman un conjunto de cardinalidad \aleph_1 .

De acuerdo con lo dicho, decir que un objeto existe o es real tiene dos sentidos: puede significar que está definido con claridad y que se han determinado sus relaciones con los demás objetos de su dominio, con lo cual adquiere existencia inmanente. Puede significar, por otra parte, que el objeto tiene una contrapartida en el mundo natural que en el caso de los números no es más que la existencia de conjuntos sobre la base de los cuales puedan definirse cardinales y ordinales. En este sentido para Cantor, igual que para Frege, un número existe si hay un conjunto del que es número.

Hasta aquí podría dudarse de que el autor sostenga un punto de vista realista ya que podría ocurrir que unos objetos tuvieran existencia transiente y otros únicamente existencia inmanente, de manera que estos últimos no tuvieran referentes externos y la verdad de las afirmaciones que hacen referencia a ellos fuera definida en términos de coherencia interna del sistema o algo por el estilo. Sin embargo, Cantor rechaza esta posibilidad al afirmar que todo lo que tiene existencia inmanente tiene existencia transiente, esto es, que no hay objetos que tengan sólo el primer tipo de existencia. Dicho de otro modo, para Cantor todo objeto que cumpla las condiciones que le garantizan la existencia inmanente es además un reflejo de objetos, propiedades o relaciones que ocurren fuera de nosotros. En palabras de Cantor:

¹⁷ Jourdain, P., *loc. cit.*

no me cabe ninguna duda de que ambos tipos de realidad siempre se encuentran juntos, en el sentido de que un concepto señalado como existente desde el primer punto de vista tiene también siempre una realidad transiente en ciertos aspectos, incluso en un número infinito de ellos.¹⁸

La íntima relación en que se encuentran ambos tipos de existencia ofrece al matemático la ventaja de que no tiene que justificar la objetividad de los conceptos que define ni tiene que arrostrar el problema epistemológico del realismo señalado por Benacerraf (1973), a saber, la dificultad de acceder a la realidad que pretendemos conocer. El punto de vista de Cantor aún aparentemente las ventajas del realismo y de la concepción epistémica de la verdad; esto es, por un lado, una definición sencilla e intuitiva de qué significa que un enunciado sea verdadero y, por otro, un método para determinar sin lugar a dudas el valor de verdad de los enunciados. El nexo de unión entre los dos tipos de existencia lo proporciona un postulado muy difícil de justificar al que Cantor llama *la unidad del todo*. El autor sostiene que el fundamento último por el que la existencia inmanente y la transiente de un objeto van indisolublemente unidas consiste en el hecho de que el universo forma una totalidad de la que también nosotros, los seres humanos, formamos parte. Cantor no lo justifica en absoluto ni vuelve a hacer referencia a él —ni a los dos tipos de existencia que venimos considerando— en ningún otro escrito. Lo único que dice Cantor sobre el postulado es:

Esta conexión de ambas realidades tiene su fundamento propio en la *unidad del todo*, al que nosotros mismos pertenecemos.¹⁹

Y en una nota al texto indica que la teoría del conocimiento y de la verdad a la que él adhiere tiene como predecesores a Platón, Spinoza y Leibniz.²⁰

Sin el recurso al postulado de la unidad del todo no hay manera de conjugar el procedimiento por el que se adscribe existencia inmanente a un objeto, que más bien parece apoyar una concepción epistémica de la verdad, con el realismo que se desprende de otros textos cantorianos y que recorre su obra. Como hemos visto, la postura realista va habitualmente unida a una concepción de la verdad como correspondencia y el significado que tiene la verdad de un enunciado o la existencia de referen-

¹⁸ Cantor, G. (1966), p. 181.

¹⁹ Cantor, G. (1966), p. 182.

²⁰ Cantor, G. (1966), pp. 206-7.

te para un término no guarda relación alguna con la forma en que llegamos a suponer que determinadas afirmaciones son verdaderas o las razones que tenemos para sustentarlas. La concepción epistémica de la verdad es opuesta a la concepción de la verdad como correspondencia, a menos que, como Cantor hace, se suponga que la relación entre conocimiento y realidad es tan íntima que no podríamos conocer nada que no fuera verdadero en el sentido más fuerte, en el sentido del ajuste total a la realidad tal como es. Podríamos pensar que Cantor, mediante el postulado, ha resuelto el problema señalado por Benacerraf, pero en mi opinión la unidad de todo sólo consigue, en el mejor de los casos, ocultarlo.

La posición de Cantor en (1883) es bastante confusa, hasta tal punto que, si se pasa por alto el postulado, las explicaciones cantorianas podrían dar también la falsa impresión de que Cantor está próximo a lo que podríamos llamar "convencionalismo" o "formalismo", esto es, a la teoría de la verdad como coherencia interna de un sistema, pero sin que el sistema conceptual que se acepte en un momento determinado como verdadero tenga un estatuto privilegiado en sus relaciones con "la estructura del mundo real" que no pueda tener otro sistema igualmente bien trabado. La opinión de que (1883) es una obra formalista la ha sostenido P. Jourdain.²¹ Por otra parte, la definición que da Cantor de la realidad transiente sugiere fuertemente otro punto de vista al que se lo puede llamar "conceptualismo": no existen los números como objetos abstractos sino sólo a la manera de conceptos bajo los que caen propiedades y relaciones de objetos externos.

De todos modos, Cantor se expresa claramente como un realista cuando justifica la objetividad de su teoría de números transfinitos y explica cómo llegó a ella. Pero, curiosamente, cuando trata el tema de la existencia explícitamente, cosa que sólo hace en (1883), utiliza categorías que no ha utilizado antes y no volverá a utilizar —la distinción entre existencia inmanente y transiente y el postulado de la unidad del todo— y usa expresiones que recuerdan ya al formalismo ya al conceptualismo.

2.3. Realismo y libertad

También en (1883), tras la introducción del postulado de la unidad del todo, subraya Cantor a modo de conclusión que la esencia de la matemática radica en su libertad. Esta afirmación, una de las más conocidas y ci-

²¹ Cf. nota 12.

tadas del pensamiento cantoriano, vuelve a plantear la cuestión de si Cantor era o no formalista. Dos de los más grandes especialistas en el pensamiento del autor que nos ocupa, J. Dauben²² y I. Grattan-Guinness,²³ señalan que para Cantor la existencia se reduce a ausencia de contradicción y que la caracterización de la matemática como absolutamente libre avala la interpretación de que el autor era formalista. Esta opinión está muy extendida, como ejemplo puede considerarse el trabajo de D. Bonevac (1883) que presenta una semántica para la teoría de conjuntos que dé razón de la idea cantoriana de la libertad de la matemática, interpretada ésta en el sentido de que la existencia sólo requiere la consistencia.

Sin embargo, y en primer lugar, es falso que para Cantor la existencia matemática se reduzca a no contradicción. Cantor exige que se puedan determinar completamente las relaciones que el candidato a existente mantiene con el resto de las entidades del dominio en el que se ha introducido y este rasgo de su posición queda, en mi opinión, mejor caracterizado llamándolo "coherencia" que "consistencia". En segundo lugar, la libertad de la matemática declarada por el autor y el formalismo que algunos ven en su concepción encajan mal con algunos textos muy explícitos del matemático centroeuropeo: por ejemplo, en el mismo (1883) el autor confiesa haberse visto compelido a aceptar la existencia de los números y la corrección de su teoría de números transfinitos casi contra su voluntad (*fast wider meinen Willen*).²⁴ No puede haber forma de expresar el proceso de formación de la teoría de manera más contradictoria con la libertad de la que hablará posteriormente. En (1887-88), al denunciar la confusión frecuente entre el infinito actual y el potencial, escribe:

En particular veo aquí la razón por la que no se han descubierto [*entdeckt hat*] antes los *números transfinitos*.²⁵

y utiliza el verbo "descubrir". Dauben hace referencia a una carta inédita en la que Cantor denomina a la teoría de conjuntos "*terra incognita*",²⁶ que sugiere que considera al matemático más como explorador que como inventor. Fraenkel recoge otra carta a Mittag-Leffler en la que se dice:

²² Dauben, J. (1979), p. 129.

²³ Grattan-Guinness, I. (1982), p. 42.

²⁴ Cantor, G. (1966) p. 175.

²⁵ Cantor, G. (1966) p. 395.

²⁶ Dauben, J. (1982), p. 133.

en lo que concierne al resto (aparte del estilo y la economía de la expresión) no es mérito mío, en relación con el contenido de mi trabajo he sido simplemente informador y notorio.²⁷

¿Qué quiere decir entonces el autor cuando declara que la matemática es libre? La libertad de la que aquí se habla no tiene, en mi opinión, nada que ver con la arbitrariedad ni con la pura invención. Lo que Cantor está aquí defendiendo es el estatuto independiente de la investigación matemática, no sujeto a la censura ni filosófica ni religiosa. Propongo que se entienda la libertad de la matemática, que subraya el autor, en el sentido de *autonomía*. La matemática no tiene que justificar la existencia de los objetos que maneja ni la objetividad de sus conceptos, tarea que corresponde a la metafísica, y los únicos argumentos que deben tenerse en cuenta a la hora de calibrar una teoría son los estrictamente matemáticos. Esta autonomía no constituye un peligro para el desarrollo de la ciencia, más bien ocurre lo contrario: si se constriñe la matemática desde posiciones que le son ajenas, se corre el riesgo de acabar con la fecundidad y el progreso matemático. Por otra parte, la libertad en cuanto a la introducción de nuevos objetos y conceptos no puede ser perjudicial puesto que, como se dice en (1883),²⁸ la matemática lleva incorporados sus propios mecanismos de corrección y, así, si una noción se manifiesta como vacía o redundante será rechazada y no existirá en ninguno de los dos sentidos.

La justificación de la autonomía de la matemática es otra de las ventajas del postulado de la unidad del todo. Mediante éste se garantiza la existencia transiente de los objetos matemáticos y se descarga al matemático de la tarea de probar tal existencia. Con el postulado, Cantor se está defendiendo de antemano de la acusación de que sus números son meros signos sin significado real, acusación que Kronecker ya había dirigido contra los irracionales, y la autonomía de su ciencia le permite a su vez hacer caso omiso de las críticas que se dirijan a su teoría de conjuntos desde la filosofía o la teología.

Hay, no obstante lo dicho, un sentido en el cual no es erróneo afirmar que en la concepción de (1883) la ausencia de contradicción es condición suficiente de la existencia; pero, lejos de justificar este sentido, el calificativo de formalista subraya más bien ciertas resonancias neoplatónicas que aparecen en esta obra y en obras posteriores: en (1883) los ecos neoplatónicos se dejan ver en la conexión entre la existencia inmanente y la transiente. Como sabemos, todo lo que tiene un tipo de existencia tiene tam-

²⁷ Cantor, G. (1966), p. 480.

²⁸ Cantor, G. (1966), p. 182.

bién el otro, es decir, todo lo que está bien definido y es coherente con el sistema en el que se introduce existe y es real. La idea neoplatónica que subyace podría formularse diciendo que existe todo lo que es compatible con la coherencia del sistema, existe todo lo que puede existir. Posteriormente a 1883, se encuentran fuertes indicios de neoplatonismo en la justificación teológica de los números transfinitos que pretende llevar a cabo Cantor en una carta al cardenal Franzelin. En ella sostiene que si Dios es perfecto tiene que tener en su mano la posibilidad de crear infinitos objetos, esto es, de crear infinitos concretos en el mundo. Y si Dios es bondadoso tiene que haber creado todo lo posible. El texto de la carta dice así:

Una prueba parte del concepto de Dios y concluye en primer lugar la posibilidad de la creación de un *Transfinitum ordinatum* a partir de la absoluta perfección de la esencia de Dios, acto seguido [se concluye] la necesidad de la efectiva creación consiguiente de un *transfinitum* a partir de su absoluta bondad y magnificencia.²⁹

Tanto la necesaria conexión de los dos tipos de existencia que Cantor distingue como la legitimidad de deducir la necesidad de la existencia de los objetos sobre la base de su mera posibilidad en virtud de la esencia bondadosa del creador, como ocurre en la carta citada, son, creo, formulaciones claras de lo que A. Lovejoy ha llamado el *Principio de Plenitud*, un principio neoplatónico que ha recorrido toda la historia de la filosofía occidental.³⁰

M. Hallett (1984) también ha señalado este rasgo de la ontología de Cantor, aunque sin relacionarlo con el principio de Lovejoy. Dice Hallett:

La coherencia puede considerarse como un tipo de condición mínima que la matemática debe respetar, pero de acuerdo con las doctrinas de Cantor esta condición mínima es un principio de existencia máxima: existen tantas cosas como son posibles.³¹

2.4. El platonismo de Cantor

Como he indicado, llamaré *platonismo* a la concepción realista de la existencia que añade además las tesis de que a) los objetos abstractos

²⁹ Cantor, G. (1966), p. 400.

³⁰ La denominación de "Principio de Plenitud" ha sido acuñada por A. Lovejoy en (1983).

³¹ Hallett, M. (1984), p. 19.

existen como tales en algún lugar de la misma manera que los objetos físicos existen en el mundo y que b) los objetos físicos tienen un grado de realidad inferior a los objetos "extramundanos", los cuales constituyen el paradigma de lo auténticamente real.

Hasta ahora he defendido que Cantor era un realista en el sentido explicado al comienzo del presente trabajo, pero este realismo respecto de los números no implica que cada uno de los números se encuentre existiendo como un objeto en un mundo no físico. Así como las tesis realistas recorren prácticamente la obra de Cantor, las tesis que he llamado platónicas sólo aparecen claramente en dos cartas del año 1895 y, con menos claridad, parecen desprenderse de una de las conclusiones de su *Habilitationsschrift* (1869).³² En una de las cartas de 1895, dirigida a Hermite, puede leerse lo siguiente:

Permitame en este sentido hacer notar que a mí me parece más fuerte la realidad y la absoluta regularidad de los números enteros que la del mundo de los sentidos. Y el que ocurra así tiene un único fundamento muy simple, a saber, éste: que los números enteros tanto separados como en su totalidad actualmente infinita existen con el grado de realidad más alto como ideas eternas en el intelecto divino.³³

Al tipo de platonismo que, como hace Cantor, sustituye el Mundo de las Ideas de Platón por la mente de Dios se lo llama a veces *platonismo agustiniano*.

Como se desprende de lo dicho, las ideas platónicas, al contrario de las tesis realistas, no son muy importantes en el pensamiento de Cantor. El realismo, sin embargo, se encuentra por todas partes; un realismo que va ampliándose hasta abarcar las nuevas regiones relacionadas con el infinito; un realismo con muchos matices, a veces difícil de descubrir, a veces subrayado hasta llegar al platonismo, y en definitiva un punto de vista de la verdad y la existencia que fue, en gran medida, responsable del nacimiento de la teoría de conjuntos y números transfinitos.

BIBLIOGRAFÍA

Benacerraf, P. y Putnam, H. (comps.): 1983, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge, Cambridge University Press.

³² Cf. nota 5.

³³ Meschkowski, H. (1967), p. 262.

Benacerraf, P.: 1973, "Mathematical Truth", en Benacerraf, P. y Putnam, H. (1983).

Cantor, G.: 1966, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, compilado por E. Zermelo, Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung.

— : 1869, "De transformatione formarum ternariarum quadraticarum", en Cantor (1966).

— : 1872, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", en Cantor (1966).

— : 1883, "Grundlagen einer allgemein Mannigfaltigkeitslehre", en Cantor (1966).

Carnap, R.: 1950, "Empiricism, Semantics and Ontology", en Benacerraf, P. y Putnam, H. (1983).

Dauben, J.: 1979, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Frege, G.: 1974, *Escritos lógico-semánticos*, Madrid, Tecnos.

— : 1914, "La lógica en la matemática", en Frege (1974).

Gödel, K.: 1981, *Obras completas*, Madrid, Alianza Universidad.

— : 1944, "La lógica matemática de Russell", en Gödel (1981).

— : 1947, "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", en Gödel (1981).

Grattan-Guinness, I.: 1982, "Psychology in the Foundations of Logic and Mathematics: The Cases of Boole, Cantor and Brouwer", *History and Philosophy of Logic*, 3.

Hallet, M.: 1984, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford, Clarendon Press.

Horwich, P.: 1982, "Three Forms of Realism", *Synthese*, 51.

Jourdain, P.: "Introduction" a G. Cantor: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, New York, Dover Publications Inc., 1955.

Kripke, S.: 1975, "Outline of a Theory of Truth", *The Journal of Philosophy*, vol. 72.

Maddy, P.: 1980, "Perception and Mathematical Intuition", *The Philosophical Review*, LXXXIX, N° 2.

Meschkowski, H.: 1967, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn.

Sober, E.: 1982, "Realism and Independence", *Noûs*, vol. XXVI, N° 3.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the attitudes Cantor held on the existence of abstract objects. I distinguish between (i) this attitude relatively to entities in the definition of which we do not need to use actually infinite sets, like integers and rationals, and (ii) realism about entities which force us to deal with actual infinities, like irrational and transfinite numbers. About (i), Cantor was always a realist. Nevertheless, he changed his ideas on the existence of entities which had a very strong connection with the infinite in act. In this case, he adopted a formalist attitude until *Grundlagen* (1883) and this work inaugurates his realist period relatively to irrationals and transfinite numbers. I also distinguish between realism and platonism, the latter adding to the former (a) that abstract entities exist somewhere and (b) that they are in some sense more real than physical entities. We can also find platonic features in Cantor's thought, although platonic ideas are not so essential to his work as realism is. On the other hand, it is not true that Cantor considered consistence as a sufficient condition for existence but what we can call "coherence".