LA DINAMICA DE CREENCIAS COMO BASE DE LA LOGICA MODAL

CARLOS OLLER

1. Introducción

Peter Gärdenfors ha propuesto en (3) un enfoque acerca de las proposiciones alternativo al que se suele hacer en términos de mundos posibles. De acuerdo con esta interpretación, una proposición es identificada con el conjunto de mundos posibles en que es verdadera. Las conectivas lógicas, una vez aceptada esta definición de "proposición", se pueden construir en términos conjuntísticos; así, la conjunción de dos proposiciones se identifica con la intersección de los conjuntos de mundos posibles en que esas proposiciones son verdaderas, la disyunción con la unión de tales conjuntos, etc.

La dinámica de creencias proporciona, por su parte, la posibilidad de fundamentar la lógica proposicional sin recurrir a la ontología de los mundos posibles. La base de esta reconstrucción de la lógica se encuentra en la caracterización de una proposición "por el cambio que induciría si se añadiese a un estado epistémico. Técnicamente, esto significa que las proposiciones serán definidas como funciones con estados epistémicos como argumentos y valores".[1] En efecto, cuando un individuo acepta el contenido de una oración, una proposición, se produce una expansión de su estado epistémico. Una proposición es, pues, un tipo de *input* epistémico que resulta en una expansión; a su vez, una manera de caracterizar a un *input* epistémico es identificarlo con el cambio que induce en los distintos estados epistémicos, es decir, como una función de estados epistémicos en estados epistémicos. Lo anterior sugiere la siguiente definición de "proposición":

(Def. I) Una proposición es una función de estados epistémicos en estados epistémicos.

Una aplicación inmediata de esta definición es la de la relación "ser aceptada como conocida":

(Def. II) La proposición A es aceptada como conocida en el estado epistémico K si y sólo si $A(K) = K$.

[1] Gärdenfors (3), p. 131.

2. Caracterización del conjunto de las proposiciones

El conjunto de las proposiciones puede caracterizarse por medio de los postulados y definiciones que siguen a continuación:

(Def III) Un modelo de creencias es un par ordenado $<\mathbf{K}, Prop>$, donde $\mathbf{K}$ es un conjunto de estados epistémicos y Prop es un conjunto de funciones de $\mathbf{K}$ en $\mathbf{K}$. Los elementos de $\mathbf{K}$ serán denotados K, K',... y los de Prop, A, B,...

(P1) Para todo A y B de un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$, existe una función A&B que pertenece a Prop, tal que $A\&B(K) = A(B(K))$, para todo K de $\mathbf{K}$.

(P2) Para todo A y B de un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$, $A\&B(K) = B\&A(K)$, para todo K de $\mathbf{K}$.

(P3) Para todo A y todo K de un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$, $A\&A(K) = A(K)$.

(P4) La función identidad, que se define por $I(K) = K$ para todo K de $\mathbf{K}$, está en todo modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$.

(Def. IV) Una proposición A es una tautología en un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$ si y sólo si $A = I$ para todo K de $\mathbf{K}$.

(Def. V) Una proposición B es una consecuencia lógica de una proposición A en un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$ si y sólo si $B(A(K)) = A(K)$, para todo K de $\mathbf{K}$.

(Def. VI) Una proposición D es la proposición más fuerte (más débil) de un conjunto de proposiciones si y sólo si todas las proposiciones del conjunto son consecuencia lógica de D (tienen a D como consecuencia lógica). Se puede probar que si un conjunto de proposiciones tiene un elemento más fuerte (más débil), entonces éste es único.

(P5) Para todo A y B de un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$, el conjunto de funciones D que satisfacen la ecuación $A\&D(K) = B\&D(K)$, para todo K de $\mathbf{K}$, tiene un elemento más débil; este elemento (único) será denotado $A \leftrightarrow B$.

(Def. VII) $(A \rightarrow B)(K) = A \leftrightarrow (A\&B)(K)$, para todo K de $\mathbf{K}$.

(P6) En todo modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$, existe una función constante $\perp$ y un estado de creencias $K_\perp$, tal que $\perp(K) = K_\perp$, para todo K de $\mathbf{K}$.

(Def. VIII) La negación de una proposición A, denotada por $\neg A$, se define como la proposición $A \rightarrow \perp$.

(P7) Para todo A y B de un modelo de creencias $<\mathbf{K}, Prop>$, el conjunto de funciones D que satisface tanto la ecuación $D\&A(K) = A(K)$

como la ecuación D&B(K) = B(K), para todo K de **K**, tiene un (único) elemento más fuerte, que será denotado por A v B.

(P8) Para todo A y B de un modelo de creencias <**K**, Prop>, A ↔ B(K) = (¬A) ↔ (¬B)(K), para todo K de **K**.

Los postulados aseguran la existencia de las proposiciones complejas que resultan de la aplicación de las operaciones sobre proposiciones, que corresponden a las conectivas oracionales estándar. Además, (P2), (P3) y (P8) establecen ciertas propiedades de la conjunción y la equivalencia, entendidas como operaciones sobre proposiciones.

3. Determinación del conjunto de las tautologías

El conjunto de las formas proposicionales que son tautologías en todos los modelos de creencias puede determinarse con la ayuda de los dos teoremas que siguen:

Teorema 1: Para cualquier modelo de creencias <**K**, Prop>, y cualesquiera A, B y C de <**K**, Prop>, B&A(K) = C&A(K), para todo K de **K**, si y sólo si (B ↔ C)&A(K) = A(K).

De acuerdo con (P5), si B&A(K) = C&A(K), entonces A(K) = B ↔ C(K). Por tanto, de acuerdo con (P3), (B ↔ C)&A(K) = A(K).

Supóngase que (B ↔ C)&A(K) = A(K), entonces, ya que por (P5) B&(B ↔ C)(K) = C&(B ↔ C)(K), B&(B ↔ C)&A(K) = C&(B ↔ C) &A(K), y por tanto B&A(K) = C&A(K).

Teorema 2: Para todo modelo de creencias <**K**, Prop> y toda proposición A y B de <**K**, Prop>, A(K) = B(K) sii (A ↔ B)(K) = I(K).

De acuerdo con el teorema 1, A&I(K) = B&I(K) si y sólo si (A ↔ B)&I(K) = I(K). De (P4) se sigue que A&I(K) = I&A(K) = I(A(K)) = A(K); siguiendo la misma línea de argumentación para B&I(K) y (A ↔ B)&I(K) se obtiene que A(K) = B(K) si y sólo si (A ↔ B)(K) = I(K).

Se puede probar, también, que si A y A → B son tautologías en un modelo de creencias, entonces B también lo es en ese modelo, es decir, que el *modus ponens* preserva las tautologías (de aquí en más se omitirán los argumentos de las funciones, los que deberán sobreentenderse). En efecto, supóngase que A = I y A → B = I; entonces, por (Def. VII), A ↔ (A&B) = I, y por el teorema 2, A = A&B. Pero como A = I, entonces I = I&B = B, en virtud de (P4).

Gärdenfors señala que todas las instancias de los siguientes esquemas proposicionales son tautologías en todos los modelos de creencias:

(T1) (A&B) → A

(T2) (A&B) → B

(T3) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B\&C)))$
(T4) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(T5) $A \to (B \to A)$
(T6) $\perp \to A$
(T7) $A \to (A \vee B)$
(T8) $B \to (A \vee B)$
(T9) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Para demostrar, por ejemplo, que todas las instancias de $(A\&B) \to A$ son tautologías en todos los modelos de creencias, es necesario mostrar que $(A\&B) \to A = I$ en cualquiera de esos modelos. De acuerdo con (DEF. VII), $(A\&B) \to A = (A\&B) \leftrightarrow ((A\&B)\&A)$, y de acuerdo con (P2) el segundo miembro de esta ecuación es igual a $(A\&B) \leftrightarrow (A\&(A\&B))$. Como de (P1) se desprende que la operación & es asociativa, $(A\&B) \leftrightarrow (A\&(A\&B)) = (A\&B) \leftrightarrow ((A\&A)\&B)$; a su vez, en virtud de (P3), $(A\&B) \leftrightarrow ((A\&A)\&B)) = (A\&B) \leftrightarrow (A\&B)$. Como $A\&B = A\&B$, se sigue en virtud del teorema 2 que $(A\&B) \leftrightarrow (A\&B) = I$, lo que a su vez implica, por transitividad de la igualdad, que $(A\&B) \to A = I$ en cualquier modelo de creencias, que era lo que había que demostrar.

4. La lógica proposicional y los modelos de creencias

La definición siguiente establece una relación entre lógica y modelos de creencias:

(Def. IX) Una lógica L está determinada por una clase de modelos de creencias M si y sólo si, dado cualquier esquema proposicional S, todas las instancias de sustitución de S, interpretadas como funciones de modelos de creencias, son tautologías en todos los modelos de creencias de M, si y sólo si todas las instancias de sustitución de S, interpretadas como fórmulas de un lenguaje proposicional, son teoremas de L.

Gärdenfors muestra que la lógica determinada por la clase de todos los modelos de creencias que satisfacen (P1) - (P7) determina la lógica intuicionista proposicional. Para ello muestra que tales modelos de creencias son equivalentes a la semántica algebraica para la lógica intuicionista, la de las álgebras pseudobooleanas. De hecho, (T1) - (T9) y el *modus ponens* como regla de inferencia constituyen, si se interpretan esos esquemas como fórmulas proposicionales, una axiomatización de la lógica proposicional intuicionista; de manera que el teorema probado por Gärdenfors muestra que la lógica determinada por aquellos postulados es exactamente esa lógica.

La lógica determinada por la clase de todos los modelos de creencias que satisfacen los postulados (P1) - (P8) es, por su parte, la lógica proposicional clásica. La prueba esbozada por Gärdenfors consiste en mostrar que la lógica determinada por esos postulados incluye a la lógica clásica y que la conversa puede probarse notando que "un modelo de creencias que contenga sólo dos elementos K y $K_{\perp}$, con T (=I) y con las únicas funciones de Prop, satisface (P1) - (P8) y tiene como tautologías exactamente las tautologías clásicas".[2]

5. Postulados adicionales para modelos de creencias M

Un modelo de creencias M es un modelo de creencias que satisface los postulados (P1) - (P8) y tiene la estructura <**K**, Prop, *>, donde **K** es un conjunto de estados epistémicos, Prop un conjunto de funciones de **K** en **K** y * es una función de un lugar de argumento de Prop en Prop. Intuitivamente, la función * es una función de modalización que transforma, por ejemplo, la proposición expresada por "Hoy es lunes" en la expresada por "Es posible que hoy sea lunes".

El conjunto de las proposiciones de un modelo de creencias M queda caracterizado por los postulados (P1) - (P8), a los que se agregan cuatro postulados referentes a la función *:

(P9) Para todo A perteneciente al conjunto Prop de un modelo de creencias M, existe una función *A que también pertenece a Prop, tal que *A(A(K)) = A(K), para todo K de **K**.

(P10) Para todo A y B pertenecientes al conjunto Prop de un modelo de creencias M, *(A v B)(K) = *A v *B(K), para todo K de **K**.

(P11) Para todo A perteneciente al conjunto Prop de un modelo de creencias M, ¬*(A& ¬A)(K) = I(K), para todo K de **K**.

(P12) Para todo A y B pertenecientes a un modelo de creencias M, si A(K) = B(K) para todo K de **K**, entonces *A(K) = *B(K) para todo K de **K**.

El postulado 9 asegura, dada una función A de Prop, la existencia de una función *A también perteneciente a Prop, y que siempre que A es aceptada como conocida en un estado epistémico K, la proposición *A es aceptada como conocida en ese estado epistémico. Dicho de otra manera, *A es una consecuencia lógica de A.

[2] *Idem*, Appendix D, p. 238.

El postulado 10 asegura que la operación * es distributiva con respecto a la disyunción de proposiciones.

El postulado 11 se comprende mejor si se introduce la siguiente definición:

(Def. X) $'A(K) = \neg{}^*\neg A(K)$, para todo K de **K**.

El operador ' es, intuitivamente, el operador de necesidad, y la definición X lo introduce en términos del operador * de posibilidad. De acuerdo con esto, el postulado 11 establece que si una proposición es una tautología, entonces la proposición que resulta de aplicarle la función ' es también una tautología, ya que $\neg{}^*(A\&\neg A)(K) = {}'\neg(A\&\neg A)(K)$, para todo K de **K**.

El postulado 12 establece que la función * es una función extensional.

6. La lógica determinada por los modelos de creencias M

Para la cuestión de cuál es la lógica determinada por los modelos de creencias M, es útil notar que los esquemas proposicionales siguientes son tautologías en todos esos modelos:

(T10) $A \to {}^*A$

(T11) ${}^*(A \vee B) \leftrightarrow {}^*A \vee {}^*B$

(T12) $\neg{}^*(A\&\neg A)$

Para demostrar que (T10) es una tautología en todos los modelos de creencias M, se puede apelar a (P9), de acuerdo con el cual ${}^*A(A) = A$, y consiguientemente, por la simetría de la igualdad, $A = {}^*A(A)$. Por (P1), ${}^*A(A) = {}^*A\&A$, y por (P2), ${}^*A\&A = A\&{}^*A$; luego, aplicando reiteradamente transitividad de la igualdad, $A = A\&{}^*A$. De esto, por el teorema 2, se deduce que $A \leftrightarrow A\&{}^*A = I$; por (Def. VII), $A \leftrightarrow A\&{}^*A = A \to {}^*A$ y, por transitividad de la igualdad, $A \to {}^*A = I$, que era lo que había que demostrar.

La demostración de que (T11) es una tautología en todos los modelos de creencias M se puede obtener directamente de (P10) aplicando el teorema 2. En efecto, como, según (P10), ${}^*(A \vee B) = {}^*A \vee {}^*B$, por ese teorema, ${}^*(A \vee B) \leftrightarrow {}^*A \vee {}^*B = I$.

En cuanto al esquema (T12), que es una tautología en todo modelo de creencias M, es precisamente lo que asegura el postulado 11.

Es fácil demostrar que la regla de extensionalidad preserva las tautologías, es decir, que si $A \leftrightarrow B$ es una tautología en un modelo de creencias M, entonces ${}^*A \leftrightarrow {}^*B$ también lo es. En efecto, si $A \leftrightarrow B$ es una tautología, entonces, por el teorema 2, $A = B$; pero esto implica, por (P12), que $*A = *B$. Aplicando nuevamente el teorema 2, se obtiene $*A \leftrightarrow *B = I$.

Las fórmulas (T10) - (T12), interpretadas como esquemas oracionales, junto con la regla de extensionalidad, constituyen, al agregarse a una axiomatización para la lógica proposicional clásica, una base axiomática para el sistema M de von Wright,[3] que es deductivamente equivalente al sistema T de Feys.[4] Como (T10) - (T12) son, según se ha visto, tautologías en todos los modelos de creencias M y la regla de extensionalidad preserva las tautologías, la lógica determinada, en el sentido de la definición IX, por los modelos de creencias que satisfacen los postulados (P1) - (P12) incluye a la lógica modal alética del sistema M.

Si ahora se logra mostrar que es posible derivar a partir de (P1) - (P8), la regla de extensionalidad y el hecho de que los esquemas (T10) - (T12) sean tautologías en todos los modelos de creencias M los postulados (P9) - (P12), entonces se habrá mostrado que la lógica determinada por los postulados (P1) - (P12) es exactamente la lógica del sistema M de von Wright. Para derivar los postulados (P9) y (P10) basta invertir la demostración de que (T10) y (T11) son tautologías en todos los modelos de creencias M presentada más arriba. Lo afirmado por (P11) es, justamente, que (T12) es una tautología. En cuanto a (P12), si $A = B$, entonces por el teorema 2 $A \leftrightarrow B = I$, y por la regla de extensionalidad $*A \leftrightarrow *B = I$; pero entonces, por el teorema 2, se da que $*A = *B$.

Se ha probado, de esta manera, que la lógica determinada por los modelos de creencias M, es decir, por los modelos de creencias que satisfacen los postulados (P1) - (P12), es la lógica del sistema M. Agregando el postulado siguiente:

(P13) Para todo A perteneciente a Prop se cumple que:
$*A(**A)(K) = **A(K)$, para todo K de **K**.

Se obtiene una clase de modelos de creencias que determinan la lógica del sistema M' de von Wright, deductivamente equivalente al S4 de Lewis. (P13) expresa que si se acepta como conocido en un estado epistémico K que es posible que sea posible A, también se tiene que aceptar como conocida la proposición de que es posible A. Si ahora se añade el postulado que sigue:

(P14) Para todo A de Prop se cumple que $\neg *A(*\neg *A(K)) = *\neg *A(K)$, para todo K de **K**.

[3] Véase (4), Apéndice, pp. 123-127.

[4] Véase (1), cap. VII, pp. 110-116.

Se obtiene una clase de modelos de creencias que determinan la lógica del sistema M" de von Wright, deductivamente equivalente al sistema S5 de Lewis. La demostración de que los modelos de creencias que satisfacen los postulados (P1) - (P13), a los que se puede llamar "modelos de creencias M' ", y los que satisfacen los postulados (P1) - (P14), a los que se puede llamar "modelos de creencias M" ", determinan respectivamente la lógica modal de los sistemas M' y M" es análoga a la presentada más arriba referente a los modelos de creencias que satisfacen los postulados (P1) - (P12).

BIBLIOGRAFIA

(1) Hughes, G. E. y Cresswell, M. J., *Introducción a la lógica modal*, Madrid, Tecnos, 1973.

(2) Gärdenfors, P., "The Dynamics of Belief as a Basis for Logic", *The British Journal for the Philosophy of Science* 35 (1984), 1-10.

(3) Gärdenfors, P., *Knowledge in Flux*, Cambridge (Mass.), MIT Press-Bradford Books, 1988.

(4) Von Wright, G. H., *Ensayo de lógica modal*, Buenos Aires, Rueda Editor, 1970.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

ABSTRACT

Peter Gärdenfors has shown how propositional logic can be constructed from the dynamics of belief. He defines a proposition as a function representing changes of belief, thus avoiding the usual definition in terms of possible worlds. He introduces postulates for operations of propositions which correspond to each of the standard sentential connectives, and proves that the class of all belief models that satisfy them determines the classical propositional logic. I define a belief model M and characterize the class of propositions in such a model by adding four postulates to Gärdenfors' ones. I show that the logic determined by the belief models M is the logic of von Wright's system M. I also show how von Wright's modal systems M' and M" can be constructed in a similar way.