EXTENSION POR DEFINICIONES EN TEORIA DE MODELOS: TRES TEOREMAS DE PRESERVACION PARA EXPANSIONES DE BETH

FRANCISCO NAISHTAT

1. Introducción

El propósito de este estudio es proponer tres resultados sobre extensiones por definiciones en un lenguaje de primer orden. La noción de extensión de un lenguaje por definiciones está basada en la idea de *definición explícita* de Beth (Beth, 1953) y codifica aquellas ampliaciones en las partes no lógicas de un lenguaje que no aumentan su poder expresivo. Los nuevos símbolos, cuando están mediados por definiciones explícitas en términos de los símbolos primitivos, reciben el nombre de *abreviaturas*.

Vistas desde el álgebra, las abreviaturas corresponden al siguiente proceso: cualquier tratamiento algebraico medianamente complejo de una estructura matemática, trátese de un grupo, de un anillo, de un cuerpo, de un álgebra, etc., nos lleva rápidamente a definir, a partir de las relaciones, operaciones y constantes primitivas, una serie de nuevas relaciones, operaciones y constantes que permiten una mejor codificación de las estructuras matemáticas bajo estudio. Pero estas nuevas categorías, toda vez que hayan sido generadas como genuinas abreviaturas, no deben importar modificación alguna de la estructura original ni de sus categorías básicas.

Por ejemplo, si consideramos un grupo, supongamos $Gr = (G, +, 0)$, cuyas categorías primitivas son la operación diádica + ("suma"), y la constante 0 ("cero"), advertimos que las propiedades de grupo de la suma y el cero nos permiten definir una nueva función $z = inv(x)$ (por "inverso") y una nueva operación $z = x - w$ (por "diferencia") en términos de la suma y la identidad; definimos $inv(x) = z$ por la ecuación $x + z = 0$, la cual ecuación, se demuestra en teoría de grupos, tiene una raíz única en z dependiente de x; y definimos $z = x - w$ como equivalente a $z = x + inv(w)$.

Uno no atribuye a estos nuevos operadores otra cualidad que no sea la de meras "abreviaturas", cuya función se limita a un papel heurístico de codificación y ordenamiento expositivos, y que de manera alguna nos echa fuera del marco de la estructura primitiva. Procesos de esta naturaleza se dan cuando definimos el *conjunto vacío* en teoría de conjuntos, la operación de *exponenciación* en aritmética de primer orden, la relación de *orden estricto* en teoría del orden amplio (o viceversa), etc.

Ahora bien, si pasamos del plano del álgebra al plano de la lógica, estas ampliaciones pueden formalizarse para una teoría T como un tipo de extensiones de su alfabeto no lógico S, acompañadas por una serie de cláusulas definicionales (las cláusulas de Beth), que garantizan un camino de ida y vuelta entre los modelos de la teoría en el lenguaje chico y sus respectivas expansiones en el lenguaje ampliado.

Por ejemplo, retomando la teoría Γ de los grupos, el proceso descrito más arriba corresponde a la extensión del alfabeto $S = \{+, 0\}$ a un alfabeto $S' = \{+, -, \text{inv}, 0\}$. Decir que los nuevos símbolos de S'/S son S-abreviaturas quiere decir que tenemos S-fórmulas de primer orden que juegan el papel de *definiens* para estos nuevos símbolos. En este caso concreto, el *definiens* de *inv(x)* es: $x + z \equiv 0$ y la S-definición de inv(x) en el nuevo lenguaje es:

$$\phi_{inv} =_{df} (x, z)\ (z \equiv \text{inv}(x) \leftrightarrow x + z \equiv 0).$$

ϕ_{inv} es una S-definición de inv(x) en la teoría Γ precisamente porque

$$\Gamma \models (x)(Ez)\ (x + z \equiv 0\ \&\ (y)\ (x + y \equiv 0 \rightarrow z \equiv y)),$$

esto es, porque la teoría de grupos garantiza que la ecuación $x + z = 0$ tiene una única raíz en z que depende de x.

Un resultado de este planteo es que para todo grupo $A \models \Gamma$ existe una única expansión A' al lenguaje S' tal que $A' \models \phi_{inv}$.

Este último resultado puede generalizarse para cualquier proceso de extensión por abreviaturas; es decir, si T es una teoría cualquiera en el lenguaje S, S' una extensión de S, y Δ un conjunto de cláusulas definicionales para los nuevos símbolos, entonces, dado cualquier modelo

$B \models T$, existe una única expansión B' de B al lenguaje S' tal que:

$$B' \models \Delta \qquad \text{(Ebbinghaus, 1984).}$$

Proponemos llamar *expansión de Beth* a esta expansión B' del modelo B. Los tres resultados que proponemos más abajo tienen todos la característica de establecer ciertas relaciones de preservación (preservación de isomorfismo, de homomorfismo y de subestructura) entre los modelos de una teoría T y sus expansiones de Beth.

El tratamiento semántico-formal de las abreviaturas fue primero realizado por Beth en 1953 en términos de *definición explícita* (véanse Beth, 1953 y Chang y Keisler, 1973), y se encuentra condensado por Ebbinghaus, Flum y Thomas en su trabajo de 1984 (Ebbinghaus, 1984). La ventaja de este tipo de enfoque reside en que uno puede establecer una serie de correspondencias entre las estructuras originales y sus respectivas expansiones de Beth que permiten trabajar de manera elegante y rigurosa con las abreviaturas. Por ejemplo, Ebbinghaus demuestra que si dos modelos **A**, **B** son elementalmente equivalentes (en el lenguaje chico), entonces sus expansiones *de Beth* **A'**, **B'** a un lenguaje ampliado por abreviaturas, son, en este nuevo lenguaje, elementalmente equivalentes.

Nuestro propósito a continuación es retomar la caracterización de Beth y agregarle tres resultados nuevos de preservación, o que al menos no figuran entre los teoremas mencionados en Chang y Keisler (1973), ni en Ebbinghaus (1984).

Nuestro primer resultado establece que:

(1) *Todo isomorfismo entre dos modelos* **A**, **B** *de una teoría T se preserva para sus expansiones* **A'**, **B'** *respecto de un nuevo conjunto S' de símbolos a condición de que* **A'**, **B'** *sean expansiones de Beth.*

Retomando el ejemplo de los grupos, (1) implica que si h es un isomorfismo entre dos grupos $(G_1, +_1, 0_1)$ y $(G_2, +_2, 0_2)$, entonces h también es un isomorfismo entre las estructuras $(G_1, +_1, -_1, \mathrm{inv}_1, 0_1)$ y $(G_2, +_2, -_2, \mathrm{inv}_2, 0_2)$, que son las respectivas expansiones de G_1 y G_2 que satisfacen las cláusulas definicionales de inv y –.

Nuestro segundo resultado reza que:

(2) *Todo homomorfismo entre dos modelos* **A**, **B** *de una teoría T en un lenguaje funcional (que no contiene símbolo de relación alguno fuera de la identidad) se preserva para sus expansiones de Beth* **A'**, **B'** *al lenguaje ampliado (también funcional) a condición de que todo símbolo nuevo de función y de constante admita un* definiens *"positivo" (sin cuantificadores y sin otras conectivas que la conjunción y/o la disyunción) en la definición de Beth que le corresponda.*

Nuestro tercer resultado establece que:

(3) *Si* **A**, **B** *son S-estructuras que son modelos de una teoría T y tales que* **A** *es S-subestructura de* **B**, *y si S' es una extensión del lenguaje S tal que para*

todo símbolo de S'/S existe en S' una definición "elemental" (cuyo definiens *es una S-fórmula sin cuantificadores), entonces las expansiones respectivas de Beth de A y de B al lenguaje S', pongamos, A', B', son tales que A' es S'-subestructura de B'.*

Tomando nuevamente el ejemplo de los grupos, (3) implica que si $(G_1, +_1, 0_1)$ es subgrupo de $(G_2, +_2, 0_2)$, entonces $(G_1, +_1, -_1, inv_1, 0_1)$ es subestructura de $(G_2, +_2, -_2, inv_2, 0_2)$.

Aunque estos tres resultados no sean en modo alguno llamativos o sorprendentes, ya que en la expectativa de lo que uno espera de un conjunto entran definiciones en el sentido de Beth, los mismos nos permiten generalizar de manera elegante en términos de teoría de modelos algo inherente a la actividad algebraica ordinaria.

A continuación, luego de precisar la notación y de mencionar los resultados lógicos generales que presuponemos (punto 2), presentamos el tema específico de las definiciones y expansiones de Beth (punto 3) y desarrollamos los tres resultados precitados (punto 4). Finalmente, el trabajo concluye con la mención de otros resultados ligados con este tema (punto 5).

2. Precisiones de notación y resultados lógicos presupuestos

2.1. Precisiones de notación

2.1.1. Notamos las variables (de individuo) de un lenguaje de primer orden $v_0, \ldots, v_{r-1}, v_r, \ldots$; dado un término t notamos var(t) al conjunto de las variables que figuran en t, y dada una fórmula ϕ de primer orden, notamos lib(ϕ) al conjunto de las variables libres de ϕ.

2.1.2. Reservamos las letras S, S', S" para denotar la *similaridad* de un lenguaje de primer orden, esto es, los conjuntos de símbolos no lógicos de cada lenguaje de primer orden (cada tipo de similaridad S contiene a lo sumo tres categorías de símbolos, esto es, de relación, de función y de constante). Llamamos *S-término* (resp. *S-fórmula*) a todo término de primer orden (resp. a toda fórmula de primer orden) formado(a) por las reglas de buena formación a partir del alfabeto de similaridad S.

2.1.3. Si $f \in$ S es un símbolo de función r-ario, y $t_0, \ldots, t_{r-1}$ son S-términos, notamos $f t_0, \ldots, t_{r-1}$ al S-término formado a partir de f con los S-términos $t_0, \ldots, t_{r-1}$.

2.1.4. Si $R \in S$ es un símbolo de relación r-ario, y $t_0,..., t_{r-1}$ son S-términos, notamos $Rt_0,..., t_{r-1}$ a la S-fórmula atómica formada a partir de R con los S-términos $t_0,..., t_{r-1}$.

2.1.5. Llamamos T^s al conjunto de los S-términos de primer orden y L^s al conjunto de las S-fórmulas de primer orden; asimismo definimos $T^s_r =_{df} \{t \in T^s / var(t) \subset \{v_0,..., v_{r-1}\}\}$ y definimos $L^s_r =_{df} \{\phi \in L^s / lib(\phi) \subset \{v_0,..., v_{r-1}\}\}$.

2.1.6. Si $t \in T^s_r$ notamos $t = t(v_0,..., v_{r-1})$; si $\phi \in L^s_r$ notamos $\phi = \phi(v_0,..., v_{r-1})$.

2.1.7. Notamos $\phi(y/x)$ al resultado de sustituir todas las apariciones libres de x en ϕ por y (para x, y, variables de individuo).

2.1.8. Notamos $(E^{=1}x)\ \phi(x)$ a la fórmula $(Ex)(\phi(x)\ \&\ (y)\ \phi\ (y/x) \rightarrow y \equiv x\ ))$.

2.1.9. Reservamos las letras **A**, **B**, etc., en negrita, para designar S-estructuras de primer orden, y las letras A, B, etc., para denotar los universos o dominios respectivos de **A**, **B**, etc. Si s es un símbolo de S, notamos $s^{\mathbf{A}}$ la interpretación de s en la estructura **A**.

2.1.10. Si **A** es una S-estructura, $t = t(v_0,..., v_{r-1})$ y $a_0,..., a_{r-1} \in A$, notamos $t^{\mathbf{A}}[a_0,..., a_{r-1}]$ el valor de t en la estructura **A** para la asignación $B(v_i) = a_i$ (para $i = 0,..., r-1$).

2.1.11. Si **A** es una S-estructura, $\phi = \phi(v_0,..., v_{r-1})$ y $a_0,..., a_{r-1} \in A$, notamos $\mathbf{A} \models \phi[a_0,..., a_{r-1}]$ sii$_{df}$ **A** satisface ϕ para la asignación $B(v_i) = a_i$ (para $i=0, ..., r-1$).

2.1.12. Si **A** es una S-estructura y $S \subset S'$, llamamos *S'-expansión* de **A** a toda S'-estructura **B** tal que:
(i) A = B
(ii) Para todo $s \in S$, $s^{\mathbf{A}} = s^{\mathbf{B}}$.

2.1.13. Si **B** es una S'-expansión de **A**, decimos que **A** es el *S-reducto* de **B**.

2.1.14. Sean **A**, **B** dos S-estructuras y $h: A \rightarrow B$ una función biyectiva; decimos que h es un *isomorfismo de **A** en **B*** (notación $h: \mathbf{A} \approx \mathbf{B}$) si y sólo si:

(i) Para todo $R \in S$ que sea un símbolo de relación r-ario y para todos $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$, $R^A(a_0, \ldots, a_{r-1})$ sii $R^B(h(a_0), \ldots, h(a_{r-1}))$.

(ii) Para todo $f \in S$ que sea un símbolo de función r-ario, para todos $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$: $h(f^A(a_0, \ldots, a_{r-1})) = f^B(h(a_0), \ldots, h(a_{r-1}))$.

(iii) Para todo $c \in S$ que sea un símbolo de constante $h(c^A) = c^B$

2.1.15. Llamamos *estructura funcional* a toda S-estructura tal que $S \neq \emptyset$ y S sólo contiene símbolos de función y/o constante.

2.1.16. Un *homomorfismo h* entre dos S-estructuras funcionales (notación: $h: A \rightarrow B$) es una función $h: A \rightarrow B$ (no necesariamente biyectiva) tal que:

(i) Para todo $f \in S$ que sea un símbolo de función r-ario y para todos $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$, $h(f^A(a_0, \ldots, a_{r-1})) = f^B(h(a_0), \ldots, h(a_{r-1}))$.

(ii) Para todo $c \in S$ que sea un símbolo de constante, $h(c^A) = c^B$.

2.1.17. Sean **A**, **B** dos S-estructuras; decimos que **A** es una *S-subestructura de B* (y notamos $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$) sii:

(i) Para todo $R \in S$ que sea un símbolo de relación r-ario y para todos $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$, $R^A(a_0, \ldots, a_{r-1})$ sii $R^B(a_0, \ldots, a_{r-1})$.

(ii) Para todo $f \in S$ que sea un símbolo de función r-ario y para todos $a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r \in A$, $f^A(a_0, \ldots, a_{r-1}) = f^B(a_0, \ldots, a_{r-1})$.

(iii) Para todo $c \in S$ que sea un símbolo de constante $c^A = c^B$.

2.1.18. Decimos que Γ es una *S-teoría* si Γ es un conjunto de S-sentencias cerrado por la relación de consecuencia lógica.

2.1.19. Sea Γ una S-teoría y **B** una S-estructura que es modelo de Γ; decimos que una S-estructura **A** es Γ-S-submodelo de **B** sii:

(i) **A** es S-subestructura de **B**.

(ii) $\mathbf{A} \models \Gamma$.

2.2. Resultados lógicos presupuestos

2.2.1. *Lema del reducto*

Sea **A** una S-estructura; $S \subset S'$; **A'** una S'-expansión de **A**; y $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$. Luego se cumple:

(i) Para todo $t \in T^S_r$, $t^A[a_0, \ldots, a_{r-1}] = t^{A'}[a_0, \ldots, a_{r-1}]$.

(ii) Para toda $\phi \in L^S_r$, $\mathbf{A} \models \phi[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ sii $\mathbf{A'} \models \phi[a_0, \ldots, a_{r-1}]$.

2.2.2. *Lema del isomorfismo*

Sean A, B dos S-estructuras tales que h: A $\cong$ B; luego se cumple:

(i) Para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$ y para todo S-término $t = t(v_0,..., v_{r-1})$, $h(t^A[a_0,..., a_{r-1}]) = t^B[h(a_0),..., h(a_{r-1})]$.

(ii) Para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$ y para toda S-fórmula $\phi = \phi(v_0,..., v_{r-1})$ $A \models \phi[a_0,..., a_{r-1}]$ sii $B \models \phi[h(a_0),..., h(a_{r-1})]$.

(iii) Para toda sentencia $\phi \in L^s_0$, $A \models \phi$ sii $B \models \phi$.

2.2.3. *Lema del homomorfismo*

Sean A, B dos S-estructuras funcionales tales que existe un homomorfismo h: A $\rightarrow$ B; luego se cumple:

(i) Para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$ y para todo S-término $t = t(v_0,..., v_{r-1})$ $h(t^A[a_0,..., a_{r-1}]) = t^B[h(a_0),..., h(a_{r-1})]$.

(ii) Para toda S-fórmula $\phi = \phi(v_0,..., v_{r-1})$ sin cuantificadores y positiva (sin otras conectivas que la conjunción y/o la disyunción) se cumple:

Para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$,

si $A \models \phi[a_0,..., a_{r-1}]$, entonces $B \models \phi[h(a_0),..., h(a_{r-1})]$.

2.2.4. *Lema de la subestructura*

Sean A, B tales que A es S-subestructura de B. Luego se cumple que:

(i) Para todo S-término $t(v_0,..., v_{r-1})$ y para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$, $t^A[a_0,..., a_{r-1}] = t^B[a_0,..., a_{r-1}]$.

(ii) Para toda S-fórmula abierta $\phi(v_0,..., v_{r-1})$ (sin cuantificadores) y para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$:

$A \models \phi[a_0,..., a_{r-1}]$ sii $B \models \phi[a_0,..., a_{r-1}]$.

(iii) Para toda ϕ que sea una S-sentencia universal (de tipo $(v_0,..., v_{r-1})\Psi$ donde Ψ es una S-fórmula abierta), si $B \models \phi$, entonces $A \models \phi$.

(iv) Para toda ϕ que sea una S-sentencia existencial (de tipo $(Ev_0,..., v_{r-1})\Psi$ donde Ψ es una S-fórmula abierta), si $A \models \phi$, entonces $B \models \phi$.

Ahora estamos en condiciones de exponer los conceptos y propiedades que conciernen específicamente a este trabajo.

3. Extensión por definiciones y expansión de Beth de un modelo

3.1. Ser una S-definición (explícita) de un S'-símbolo en una S-teoría Γ

Sea Γ un conjunto de S-sentencias ($\Gamma \subset L^s_0$), a continuación definimos qué significa dar una *S-definición en* Γ para un S'-símbolo que no pertenece a S. Este concepto pertenece a Beth (Beth, 1953) y está desarrollado por Chang y Keisler (1973, pp. 87-88) y por Ebbinghaus (1984, cap. VIII).

(a) Sea R un símbolo de relación r-aria que no pertenece a S y $\phi_R(v_0,..., v_{r-1})$ una S-fórmula. Luego, la sentencia $(v_0,...,v_{r-1})(Rv_0,..., v_{r-1} \leftrightarrow \phi_R(v_0,..., v_{r-1}))$ es una S-definición de R en Γ. Diremos asimismo que ϕ_R es el *S-definiens* de R.

(b) Sea f un símbolo de función r-aria que no pertenece a S y $\phi f(v_0,..., v_{r-1}, v_r)$ una S-fórmula. Luego, la sentencia $(v_0,..., v_{r-1}, v_r)(fv_0,..., v_{r-1} \equiv v_r \leftrightarrow \phi f (v_0,.., v_{r-1}, v_r))$ es una S-definición de f en Γ sii $\Gamma \models (v_0,..., v_{r-1})(E^{=1}v_r) \phi f(v_0,..., v_{r-1}, v_r)$ (condición existencial ϕf). Diremos asimismo que ϕf es el *S-definiens* de ϕ.

(c) Sea c un símbolo de constante que no pertenece a S y $\phi_c(v_0)$ una S-fórmula. Luego, la sentencia
$(v_0)(c \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_c(v_0))$ es una S-definición de c en Γ sii
$\Gamma \models (E^{=1}v_0)\ \phi_c(v_0)$ (condición existencial ϕ_c).
Diremos asimismo que ϕ_c es el *S-definiens* de c.

3.2. Ejemplos

(a) En teoría de conjuntos ZFE definimos la constante *conjunto vacío* (notación $\varnothing$) por la siguiente sentencia:
$(v_0)(\varnothing \equiv v_0 \leftrightarrow (v_1) \neg(v_1 \in v_0))$. Esta sentencia es una $\{\in\}$-definición en ZFE porque ZFE $\models (E^{=1}v_0)(v_1) \neg(v_1 \in v_0)$.

(b) En teoría del orden estricto definimos una relación de *orden amplio* por la siguiente sentencia:
$(v_0, v_1)(v_0 \leq v_1 \leftrightarrow (v_0 < v_1 \vee v_0 \equiv v_1))$. Esta sentencia es una $\{<\}$-definición en teoría del orden estricto.

(c) En teoría de grupos G definimos la función *inverso* (notación inv(x)) por la siguiente sentencia:
$(v_0, v_1)(inv(v_0) \equiv v_1 \leftrightarrow v_0 + v_1 \equiv 0)$. Esta sentencia es una $\{+, 0\}$-definición en la teoría G porque G $\models (v_0)(E^{=1}v_1)(v_0 + v_1 \equiv 0)$.

3.3. Expansión de Beth de un modelo

Lema 3.3. (Ebbinghaus, 1984): Sea Γ un conjunto de S-sentencias y $S \subset S^{\Delta}$. Supóngase que para cada símbolo de S^{Δ}/S hay una S-definición en Γ y llamemos Δ a un subconjunto de S-definiciones en Γ tal que para cada $s \in S^{\Delta}/S$ existe exactamente una S-definición en Δ. Luego, para toda S-estructura A tal que A $\models \Gamma$ existe una única S^{Δ}-expansión A^{Δ} tal que $A^{\Delta} \models \Delta$ (llamamos *expansión de Beth de A* a la estructura A^{Δ}).

Demostración

1) Existencia

Definimos A^{Δ} del siguiente modo;

(i) $A^{\Delta} = A$.

(ii) Para todo símbolo $s \in S$, $s^{A\Delta} = s^{A}$.

(iii) Sea $R \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de relación r-ario. Por hipótesis existe una única S-fórmula $\phi_R(v_0,..., v_{r-1})$ tal que la definición $(v_0,..., v_{r-1})(Rv_0,..., v_{r-1} \leftrightarrow \phi_R(v_0,..., v_{r-1}))$ está en Δ. Luego, definimos: para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$, $R^{A\Delta}(a_0,..., a_{r-1})$ sii_{df} $A \models \phi_R[a_0,..., a_{r-1}]$.

(iv) Sea $f \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de función r-ario. Por hipótesis existe una única S-fórmula $\phi_f(v_0,..., v_{r-1}, v_r)$ tal que la definición $(v_0,..., v_{r-1}, v_r)(f\, v_0,..., v_{r-1} \equiv v_r \leftrightarrow \phi_f(v_0,..., v_{r-1}, v_r))$ está en Δ. Luego, definimos: para todos $a_0,..., a_{r-1}, a_r \in A$,

$$f^{A\Delta}(a_0,..., a_{r-1}) = a_r \ \text{sii}_{df}\ A \models \phi_f[a_0,..., a_{r-1}, a_r].\ (\dagger)$$

Puesto que $\Gamma \models (v_0,..., v_{r-1})(E^{=1}v_r)\, \phi_f(v_0,..., v_{r-1}, v_r)$ (df *supra* 3, 1b) y que por hipótesis A $\models \Gamma$, tenemos que para todos $a_0,..., a_{r-1} \in A$ existe un único $a_r \in A$ tal que $A \models \phi_f[a_0,..., a_{r-1}, a_r]$. Por tanto la definición dada en (†) define una función r-aria en $A^{\Delta} = A$

(v) Sea $c \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de constante. Por hipótesis existe una única S-fórmula $\phi_c(v_0)$ tal que la definición $(v_0)(c \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_c(v_0))$ está en Δ. Luego, definimos: para todo $a_0 \in A$, $c^{A\Delta} = a_0$ sii_{df} $A \models \phi_c[a_0]$. (††)

Puesto que $\Gamma \models (E^{=1}v_0)\phi(v_0)$ (df *supra* 3, 1c) y que por hipótesis A $\models \Gamma$, tenemos que existe un único a_0 tal que $A \models \phi_c[a_0]$. En consecuencia, la definición dada en (††) define la interpretación de una constante.

Tenemos entonces definida una expansión A^{Δ} de A al lenguaje S^{Δ}. Es obvio, por construcción, que $A^{\Delta} \models \Delta$.

2) Unicidad

Sea A' una S^{Δ}-expansión de A tal que A' $\models \Delta$. Para ver que A' $= A^{\Delta}$ basta comprobar que ambas interpretaciones coinciden en los (S^{Δ}/S)-símbolos:

(i) Sea $R \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de relación r-ario:
Por $A^{\Delta} \models \Delta$ y $A' \models \Delta$, tenemos:
$A' \models (v_0, \ldots, v_{r-1})(Rv_0, \ldots, v_{r-1} \leftrightarrow \phi_R(v_0, \ldots, v_{r-1}))$ y
$A^{\Delta} \models (v_0, \ldots, v_{r-1})(Rv_0, \ldots, v_{r-1} \leftrightarrow \phi_R(v_0, \ldots, v_{r-1}))$.
Luego, para todos $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$, $R^{A\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1})$ sii $R^{A'}(a_0, \ldots, a_{r-1})$.
(ii) Sea $f \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de función r-ario:
Por $A^{\Delta} \models \Delta$ y $A' \models \Delta$, tenemos:
$A^{\Delta} \models (v_0, \ldots, v_{r-1}, v_r)(fv_0, \ldots, v_{r-1} \equiv v_r \leftrightarrow \phi f(v_0, \ldots, v_{r-1}, v_r))$ y
$A' \models (v_0, \ldots, v_{r-1}, v_r)(fv_0, \ldots, v_{r-1} \equiv v_r \leftrightarrow \phi f(v_0, \ldots, v_{r-1}, v_r))$.
Luego, para todos $a_0, \ldots, a_{r-1}, \in A$,
$f^{A\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1}) = a_r$ sii $f^{A'}(a_0, \ldots, a_{r-1}) = a_r$ sii $f^{A\Delta} = f^{A'}$.
(iii) Sea $c \in S^{\Delta}/S$ una constante:
Por $A^{\Delta} \models \Delta$ y $A' \models \Delta$, tenemos:
$A^{\Delta} \models (v_0)(c \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_c(v_0))$ y
$A' \models (v_0)(c \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_c(v_0))$.
Por tanto, para todo $a_0 \in A$, $c^{A\Delta} = a_0$ sii $c^{A'} = a_0$ sii $c^{A\Delta} = c^{A'}$.

Con la demostración de 3.3. queda asentado el concepto de *expansión de Beth* en torno del cual se articulan los tres teoremas que proponemos en el punto siguiente.

4. Tres teoremas de preservación para expansiones de Beth

4.1. Teorema de preservación de isomorfismos

Este teorema (que es un corolario que yo agrego a los resultados en abreviaturas de Ebbinghaus (véase Ebbinghaus, 1984, cap. VIII) permite asumir que dos expansiones de Beth a un conjunto de nuevos símbolos son isomórficas en el lenguaje ampliado toda vez que se sepa que sus respectivos reductos en el lenguaje chico son isomórficos. En la práctica esto significa que si se demuestra, supongamos, que dos grupos A, B son hisomórficos, entonces (teorema 4.1. mediante) podemos asumir que las $\{+, -, \mathrm{inv}, 0\}$-expansiones respectivas de A y de B que satisfacen las S-definiciones de "–" y de "inv" en G son h-isomórficas. Todo lo cual quiere decir que podrá admitirse que para todos $a_0, a_1 \in A$:

(i) $h(a_0 -^A a_1) = h(a_0) -^B h(a_1)$
(ii) $h(\mathrm{inv}^A(a)) = \mathrm{inv}^B(h(a))$.

Teorema (Naishtat): Sea Γ una S-teoría; A, B $\models \Gamma$; S^{Δ} una extensión de S; Δ un conjunto de S-definiciones para todos los símbolos de S^{Δ}/S en Γ (tal que para todo $s \in S^{\Delta}/S$ exista exactamente una definición en Δ), y A^{Δ}, B^{Δ} las S^{Δ}-expansiones de Beth de A y B respectivamente. Luego:

$h: A \approx B$ si y sólo si $h: A^{\Delta} \approx B^{\Delta}$.

Demostración

($\Leftarrow$) ¡Es el sentido trivial!

($\Rightarrow$)

1) Sea $R \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de relación r-ario: para todos $a_0,\dots, a_{r-1} \in A$:
$R^{A\Delta}(a_0,\dots, a_{r-1})$ sii $A^{\Delta} \models Rv_0,\dots, v_{r-1}[a_0,\dots, a_{r-1}]$ (†) (definición de Tarski)
sii $A^{\Delta} \models \phi_R[a_0,\dots, a_{r-1}]$ (*)
(donde ϕ_R es la L^s_r-fórmula que es el *definiens* de R, es decir, tal que la sentencia $(v_0,\dots, v_{r-1})(Rv_0,\dots, v_{r-1} \leftrightarrow \phi_R(v_0,\dots, v_{r-1})) \in \Delta$; luego (*) proviene de (†) y de $A^{\Delta} \models \Delta$)
sii $A \models \phi_R[a_0,\dots, a_{r-1}]$
(por ser ϕ_R una S-fórmula y A el S-reducto de A^{Δ} [lema *supra* 2.2.1.])
sii $B \models \phi_R[h(a_0),\dots, h(a_{r-1})]$
(por $h: A \approx B$ y lema *supra* 2.2.3.)
sii $B^{\Delta} \models \phi_R[h(a_0),\dots, h(a_{r-1})]$
(por ser ϕ_R una S-fórmula y B el S-reducto de B^{Δ} [lema *supra* 2.2.1.])
sii $B^{\Delta} \models Rv_0,\dots, v_{r-1}[h(a_0),\dots, h(a_{r-1})]$
(por $B^{\Delta} \models \Delta$)
sii $R^{B\Delta}(h(a_0),\dots, h(a_{r-1}))$.

2) Sea $f \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de función r-ario: para todos $a_0,\dots, a_{r-1}, a_r \in A$:
$f^{A\Delta}(a_0,\dots, a_{r-1}) = a_r$ sii $A^{\Delta} \models fv_0,\dots, v_{r-1} \equiv v_r[a_0,\dots, a_{r-1}, a_r]$ (††)
(definición de Tarski $\models$)
sii $A^{\Delta} \models \phi f[a_0,\dots, a_{r-1}, a_r]$ (**)
(donde ϕf es la L^s_{r+1}-fórmula que es el *definiens* de f, es decir, tal que la sentencia
$(v_0,\dots, v_{r-1}, v_r)(fv_0,\dots, v_{r-1} \equiv v_r \leftrightarrow \phi f(v_0,\dots, v_{r-1}, v_r)) \in \Delta$; luego (**) proviene de (††) y de $A^{\Delta} \models \Delta$)
sii $A \models \phi f[a_0,\dots, a_{r-1}, a_r]$
(por ser ϕf una S-fórmula y A el S-reducto de A^{Δ} [lema 2.2.1.])
sii $B \models \phi f[h(a_0),\dots, h(a_{r-1}), h(a_r)]$
(por $h: A \approx B$ y lema *supra* 2.2.2.)
sii $B^{\Delta} \models \phi f[h(a_0),\dots, h(a_{r-1}), h(a_r)]$

(por ser ϕ_f una S-fórmula y **B** el S-reducto de $\mathbf{B}^{\Delta}$ [lema 2.2.1.])
sii $\mathbf{B}^{\Delta} \models f\, v_0,\dots, v_{r-1} \equiv v_r[h(a_0),\dots, h(a_{r-1}), h(a_r)]$
(por $\mathbf{B}^{\Delta} \models \Delta$)
sii $f^{\mathbf{B}\Delta}(h(a_0),\dots, h(a_{r-1})) = h(a_r)$
(por definición Tarski $\models$)
sii $f^{\mathbf{B}\Delta}(h(a_0),\dots, h(a_{r-1})) = h(f^{\mathbf{A}}(a_0,\dots, a_{r-1}))$
(por $a_r = f^{\mathbf{A}}(a_0,\dots, a_{r-1})$).

3) Sea $c \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de constante.
$c^{\mathbf{A}\Delta} = a_0$ sii $\mathbf{A}^{\Delta} \models c \equiv v_0[a_0]$ (†††)
(definición Tarski de $\models$)
sii $\mathbf{A}^{\Delta} \models \phi_c[a_0]$ (***)
(donde ϕ_c es la $L^s{}_1$-fórmula que es el *definiens* de c, es decir, tal que la sentencia $(v_0)(c \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_c(v_0)) \in \Delta$; luego (***) proviene de (†††) y de $\mathbf{A}^{\Delta} \models \Delta$)
sii $\mathbf{A} \models \phi_c[a_0]$
(por ser ϕ_c una S-fórmula y **A** el S-reducto de $\mathbf{A}^{\Delta}$ [lema 2.2.1.])
sii $\mathbf{B} \models \phi_c[h(a_0)]$
(por ser h: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ y teor. *supra* 2.2.2.)
sii $\mathbf{B}^{\Delta} \models \phi_c[h(a_0)]$
(por ser ϕ_c una S-fórmula y **B** el S-reducto de $\mathbf{B}^{\Delta}$ [lema 2.2.1.])
sii $\mathbf{B}^{\Delta} \models c \equiv v_0[h(a_0)]$
(por $\mathbf{B}^{\Delta} \models \Delta$)
sii $c^{\mathbf{B}\Delta} = h(a_0)$
(definición Tarski)
sii $c^{\mathbf{B}\Delta} = h(c^{\mathbf{A}\Delta})$.
Lo cual demuestra que h: $\mathbf{A}^{\Delta} \approx \mathbf{B}^{\Delta}$.

4.2. Teorema de preservación de homomorfismos para estructuras funcionales

Este teorema completa de algún modo el resultado 4.1. ya que extiende a los homomorfismos, bajo ciertas restricciones concernientes a la manera de definir los nuevos símbolos, la propiedad demostrada en 4.1. para los isomorfismos.

4.2.1. *Definición*

Sea S' una extensión de S; Γ, una teoría en S tal que para cada símbolo s de S'/S existe una definición δ_s en Γ. A continuación definimos para cada símbolo $s \in S'/S$ lo que significa que δ_s sea una *definición positiva en* Γ:

(i) Si s es un símbolo de relación r-ario R, y
$\delta_s = (v_0,..., v_{r-1})(Rv_0,..., v_{r-1} \leftrightarrow \phi_R(v_0,..., v_{r-1}))$, δ_s es una definición positiva de R en Γ sii el *definiens* ϕ_R es una S-fórmula abierta (sin cuantificadores) y cuyas conectivas son a lo sumo "&" y "v".

(ii) Si s es un símbolo de función r-ario f, y
$\delta_f = (v_0,..., v_{r-1}, v_r)(fv_0,..., v_{r-1} \equiv v_r \leftrightarrow \phi_f(v_0,..., v_{r-1}, v_r))$, δ_f es una definición positiva de f en Γ sii el *definiens* ϕ_f es una S-fórmula abierta (sin cuantificadores) y cuyas conectivas son a lo sumo "&" y "v".

(iii) Si s es una constante c, y $\delta_c = (v_0)(c \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_c(v_0))$, δ_c es una definición positiva de c en Γ sii el *definiens* ϕ_c es una S-fórmula abierta (sin cuantificadores) y cuyas conectivas son a lo sumo "&" y "v".

Ejemplos:

1) La definición de *inv* en teoría de grupos es positiva ya que es de tipo $(v_0, v_1)(inv(v_0) \equiv v_1 \leftrightarrow v_0 + v_1 \equiv 0)$, esto es, el *definiens* ϕ_{inv}, que es $v_0 + v_1 \equiv 0$, satisface la condición 4.2.1.ii.

2) La definición de $\varnothing$ en teoría de conjuntos ZFE *no* es positiva, ya que es de tipo $(v_0)(\varnothing \equiv v_0 \leftrightarrow (v_1)\neg(v_1 \in v_0))$, esto es, el *definiens* $\phi_\varnothing$, que es $(v_1)\neg(v_1 \in v_0)$, no satisface la condición 4.2.1.iii.

4.2.2. *Teorema* (Naishtat): Sea S un tipo funcional, Γ una S-teoría; **A**, **B** $\models \Gamma$; S^Δ una extensión de S; Δ un conjunto de S-definiciones positivas de los símbolos de S^Δ/S en Γ tal que para cada símbolo $s \in S^\Delta/S$ existe una (y sólo una) definición δ_s en Δ; sean $\mathbf{A}^\Delta$, $\mathbf{B}^\Delta$ las expansiones de Beth respectivas de **A** y **B** (tales que $\mathbf{A} \models \Delta$ y $\mathbf{B}^\Delta \models \Delta$). Luego se cumple:

Para toda función h: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$; h: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sii h: $\mathbf{A}^\Delta \to \mathbf{B}^\Delta$ (es decir, h define un homomorfismo entre los reductos sii define un homomorfismo entre las expansiones de Beth).

Demostración

($\Leftarrow$) !

($\Rightarrow$)

1) Sea $f \in S^\Delta/S$ un símbolo de función r-ario; para todos $a_0,..., a_{r-1}, a_r \in A$:
$f^{A\Delta}(a_0,..., a_{r-1}) = a_r$ sii $\mathbf{A}^\Delta \models fv_0,..., v_{r-1} \equiv v_r[a_0,..., a_{r-1}, a_r]$
sii $\mathbf{A}^\Delta \models \phi_f[a_0,..., a_{r-1}, a_r]$ (donde ϕ_f es el *definiens* de f en δ_f)
sii $\mathbf{A} \models \phi_f[a_0,..., a_{r-1}, a_r]$ (lema 2.2.1.)
implica $\mathbf{B} \models \phi_f[h(a_0),..., h(a_{r-1}), h(a_r)]$ (lema 2.2.3.)
sii $\mathbf{B}^\Delta \models \phi_f[h(a_0),..., h(a_{r-1}), h(a_r)]$ (lema 2.2.3.)
sii $\mathbf{B}^\Delta \models fv_0,..., v_{r-1} \equiv v_r[h(a_0),..., h(a_{r-1}), h(a_r)]$ (por ϕ_f *definiens* de f)

sii $f^{B\Delta}(h(a_0),..., h(a_{r-1})) = h(a_r)$ (por df $\models$).
Luego, recapitulando la cadena de implicaciones, tenemos:
$f^{A\Delta}(a_0,..., a_{r-1}) = a_r \rightarrow f^{B\Delta}(h(a_0),..., h(a_{r-1})) = h(a_r)$; por lo cual:
$h(f^{A\Delta}(a_0,..., a_{r-1})) = f^{B\Delta}(h(a_0),..., h(a_{r-1}))$.

2) Sea $c \in S^{\Delta}/S$ un símbolo de constante: para todo $a_0 \in A$:
$c^{A\Delta} = a_0$ sii $A^{\Delta} \models c \equiv v_0[a_0]$
sii $A^{\Delta} \models \phi_c[a_0]$ (donde ϕ_c es el *definiens* de c en δ)
sii $A \models \phi_c[a_0]$ (lema 2.2.1.)
implica $B \models \phi_c[h(a_0)]$ (lema 2.2.3.)
sii $B^{\Delta} \models \phi_c[h(a_0)]$ (lema 2.2.1.)
sii $B^{\Delta} \models c \equiv v_0[h(a_0)]$ (por ϕ_c *definiens* de c)
sii $c^{B\Delta} = h(a_0)$ (por df $\models$).
Luego, recomponiendo la cadena de implicaciones:
$c^{A\Delta} = a_0 \Rightarrow c^{B\Delta} = h(a_0)$; por lo cual:
$h(c^{A\Delta}) = c^{B\Delta}$.

4.3. Teorema de preservación de subestructuras

4.3.1. *Definición*

Sea S un tipo de similaridad cualquiera; Γ, una S-teoría; S' una extensión de S. Decimos que δ_s es una definición elemental de $s \in S'/S$ en Γ sii δ_s es una definición de s en Γ y el *definiens* ϕ_s de s en δ_s es una S-fórmula abierta (sin cuantificadores).

4.3.2. *Teorema (Naishtat)*

Sean **A**, **B** dos S-estructuras que son modelos de una S-teoría Γ; sea S' una extensión del conjunto de símbolos S tal que para todo nuevo símbolo $s \in S'/S$ existe exactamente una S-definición en Γ que está en Δ (notada δ_s) y que es una S-definición elemental de s en Γ (notamos ϕ_s al *definiens* de s en δ_s); sean A^{Δ}, B^{Δ} las respectivas S'-expansiones de Beth de A, B (que satisfacen Δ). Luego se cumple:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ sii } \mathbf{A}^{\Delta} \subset \mathbf{B}^{\Delta}.$$

Demostración

($\Leftarrow$) !
($\Rightarrow$)

Probamos que A^{Δ} es S'-subestructura de B^{Δ}; para ello bastará controlar los S'-símbolos que no están en S, ya que, de manera trivial, A^{Δ} es S-subestructura de B^{Δ}.

1) Sea $R \in S'/S$ un símbolo de relación r-ario:
Para todos $a_0, \ldots, a_{r-1} \in A$:
$R^{A\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1})$ sii $A^{\Delta} \models Rv_0, \ldots, v_{r-1}[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ (Tarski)
sii $A^{\Delta} \models \phi_R[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ (df ϕ_R)
sii $A \models \phi_R[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ (lema 2.2.1.]
sii $B \models \phi_R[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ (lema *supra* 2.2.4.]
sii $B^{\Delta} \models \phi_R[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ (lema 2.2.1.]
sii $B^{\Delta} \models Rv_0, \ldots, v_{r-1}[a_0, \ldots, a_{r-1}]$ (df ϕ_R)
sii $R^{B\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1})$. (Tarski)

2) Sea $f \in S'/S$ un símbolo de función-r-ario:
Para todo $a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r \in A$:
$f^{A\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1}) = a_r$ sii $A^{\Delta} \models f\, v_0, \ldots, v_{r-1} \equiv v_r[a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r]$ (Tarski)
sii $A^{\Delta} \models \phi f[a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r]$ (df ϕf)
sii $A \models \phi f[a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r]$ (lema 2.2.1.]
sii $B \models \phi f[a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r]$ (lema 2.2.4.)
sii $B^{\Delta} \models \phi f[a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r]$ (lema 2.2.1.)
sii $B^{\Delta} \models f v_0, \ldots, v_{r-1} \equiv v_r[a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r]$ (df ϕf)
sii $f^{B\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1}) = a_r = f^{A\Delta}(a_0, \ldots, a_{r-1})$ (Tarski)

3) Sea $c \in S'/S$ un símbolo de constante:
Para todo $a_0 \in A$:
$c^{A\Delta} = a_0$ sii $A^{\Delta} \models c \equiv v_0[a_0]$ (Tarski)
sii $A^{\Delta} \models \phi_c[a_0]$ (df ϕ_c)
sii $A \models \phi_c[a_0]$ (lema 2.2.1.)
sii $B \models \phi_c[a_0]$ (lema *supra* 2.2.4.)
sii $B^{\Delta} \models \phi_c[a_0]$ (lema 2.2.1.)
sii $B^{\Delta} \models c \equiv v_0[a_0]$ (df ϕ_c)
sii $c^{B\Delta} = a_0 = c^{A\Delta}$ (Tarski)

(con lo cual queda demostrado que A^{Δ} es una S'-subestructura de B^{Δ}).

4.3.3. *El teorema 4.3.2. no se cumple para definiciones cualesquiera*

Damos el siguiente contraejemplo:

(i) $S =_{df} \{s\}$ (donde s es un símbolo de función de grado 1 que llamaremos "sucesor").

(ii) Construimos en el tipo de similaridad S la teoría Γ que cuenta con la siguiente lista infinita de axiomas:

1) s es función inyectiva:
$(\Gamma 1)$ $(v_0, v_1)(sv_0 \equiv sv_1 \rightarrow v_0 \equiv v_1)$.

2) Inexistencia de ciclos: para todo $n \in N$ agregamos un axioma:
$(\Gamma 2)_n$ $(v_0)\neg(s^n v_0 \equiv v_0)$. (donde $s^n x =_{df} s...sx$) (*n*-veces)

3) Existencia de un único elemento que no es sucesor de elemento alguno:
$(\Gamma 3)$ $(Ev_0)(v_1)(\neg(v_0 \equiv sv_1)\ \&\ (v_2)(\neg(v_0 \equiv v_2) \rightarrow (Ev_3)(v_2 \equiv sv_3)))$.

Sea $\phi_0(v_0)$ la siguiente S-fórmula (con v_0 variable libre):
$\phi_0 =_{df} (v_1)\neg(v_0 \equiv sv_1)$.
Es inmediato que $\Gamma \models (E^{=1}v_0)\phi_0(v_0)$; luego, la siguiente sentencia δ_0 es una S-definición de 0 en Γ:

$$\delta_0 =_{df} (v_0)(0 \equiv v_0 \leftrightarrow \phi_0(v_0)).$$

Asimismo definimos $\Delta =_{df} \{\delta_0\}$.

Ahora bien, las siguientes estructuras son modelos de Γ: $\mathbf{A} =_{df} (N^*, s^{N^*})$ (donde N^* es el conjunto de los enteros naturales estrictamente positivos, y s^{N^*}: $N \rightarrow N$ es la función "sucesor" en N^*; esto es, para todo $x \in N$: $s^{N^*}(x) =_{df} x + 1$) y $\mathbf{B} =_{df} (N, s^N)$.

Es obvio que: $\mathbf{A} \models \phi_0[1^N]$ y que $\mathbf{B} \models \phi_0[0^N]$.

Asimismo, por lema 3.3., existen expansiones $\mathbf{A}^\Delta$, $\mathbf{B}^\Delta$, de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente, que son expansiones de Beth al lenguaje $S' = S \cup \{0\}$ y tales que:

(i) $0^{\mathbf{B}\Delta} = 0^N$

(ii) $0^{\mathbf{A}\Delta} = 1^N$.

Por lo tanto $\mathbf{A}^\Delta$ no es subestructura de $\mathbf{B}^\Delta$; sin embargo $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

La razón de la "falla" reside naturalmente en que la definición de Beth de 0 en Γ involucra al cuantificador universal; esto hace que lo que vemos como "cero" en el modelo chico no coincide necesariamente con lo que vemos como "cero" en el modelo grande.

5. Dos resultados de Ebbinghaus para expansiones de Beth

A continuación mencionamos dos resultados de Ebbinghaus (Ebbinghaus, 1984) para expansiones de Beth (véanse demostraciones en *op. cit.*, cap. VIII). Estos resultados son un puente para la restricción sin pérdida de generalidad de toda S-estructura a una S-estructura relacional, lo cual permite la demostración del teorema de Fraïssé.[1]

5.1. *Teorema* (Ebbinghaus, 1984): Sea $S \subset S^{\Delta}$ y Γ una S-teoría. Sea Δ un conjunto de S-definiciones en Γ, una para cada símbolo de S^{Δ}/S. Luego, para cada S^{Δ}-fórmula $\phi(v_0,..., v_{r-1})$ existe una S-fórmula $\phi^{*}(v_0,..., v_{r-1})$ tal que:

(i) Dada una S-estructura $A \models \Gamma$ y $a_0,..., a_{r-1} \in A$,
$A^{\Delta} \models \phi[a_0,..., a_{r-1}]$ sii $A \models \phi^{*}[a_0,..., a_{r-1}]$ (donde A^{Δ} es la expansión de Beth de A).

(ii) $\Gamma \cup \Delta \models (\phi \leftrightarrow \phi^{*})$.

5.2. *Corolario*: A es elementalmente equivalente a B sii A^{Δ} es elementalmente equivalente a B^{Δ}.[2]

BIBLIOGRAFIA

Beth, E. W. (1953), "On Padoa's Method in the Theory of Definition", *Koninklijke Nederlandse Akad. van Wetensch.* 56, A, Math. Sciences, pp. 330-339.

Chang, C. C. y Keisler, H. J. (1973), *Model Theory*, Amsterdam, North Holland.

Fraïssé, R. (1955), "Sur quelques classifications des relations, basées sur des isomorphismes restreints", *Alger Mathématiques* 2, pp. 16-60 y 273-295.

Ebbinghaus, H. D., Flum, J. y Thomas, W. (1984), *Mathematical Logic* Nueva York, Springer-Verlag.

CONICET

[1] El teorema de Fraïssé (Fraïssé, 1955) provee una caracterización algebraica de la equivalencia elemental en términos de *isomorfismos parciales*; sin embargo, este resultado opera exclusivamente con estructuras relacionales (y de finitos símbolos de relación), por lo cual es necesario un lema que permita eliminar sin pérdida de generalidad los símbolos de función. Pero éste, precisamente, es uno de los alcances del teorema 5.1.

[2] Dadas dos S-estructuras A, B, decimos que A es *elementalmente equivalente* a B sii para toda s-sentencia σ: $A \models \sigma$ sii $B \models \sigma$.

ABSTRACT

In this paper we present three results concerning the use of the so-called Beth-definable symbols in a first-order theory. A Beth-definable symbol for a given theory T is just an additional (non logic) symbol which is definable in T in the weak sense that we have an explicit definition which satisfies Beth's conventions given in (Beth, 1953). More precisely we prove that homeomorphism, isomorphism and submodel are preserved under certain restrictions when we shift from the models of T to their respective Beth-expansions in the language with the additional symbols. It is remarkable that in cases where the *definiens* does not satisfy certain syntactical conditions neither submodel nor homeomorphism are preserved by the Beth expansion models. At the end of the paper we show a trivial counterexample concerning two particular models of the "successor first-order theory".