HUSSERL - FREGE: FILOSOFIA DEL NUMERO

IGNACIO ANGELELLI

En 1884 Frege publica sus *Grundlagen der Arithmetik* (*Fundamentos de la Aritmética*), en 1891 Husserl publica su *Philosophie der Arithmetik*, que incluye una sección denominada "Freges Versuch" ("El intento de Frege"). Luego, en 1894 Frege publica una reseña del libro de Husserl. Existe también una correspondencia entre ambos autores: una carta de Frege a Husserl en 1891, y otra de Husserl a Frege en el mismo año. Después, dos cartas de Frege a Husserl, en 1906. En el año 1961 tuve oportunidad de visitar la biblioteca Husserl conservada en Lovaina y allí me llamó la atención la presencia de casi todas las obras de Frege, incluyendo separatas enviadas por el autor y dedicadas. Las notas marginales de Husserl abundan en casi todos sus ejemplares de los trabajos de Frege; he publicado algunas de ellas en mi edición del *Begriffsschrift* de Frege así como en la edición de los *Kleine Schriften*. Todo esto muestra claramente que hay entre ambos pensadores una relación no superficial.

El tema central de los libros de Husserl y Frege es el concepto de número, en especial el número natural. Ambos autores comparten un suelo común, al sostener con vehemencia la aplicabilidad universal del número. Esto por cierto carecería de sentido si nadie hubiera opinado lo contrario. En efecto, la tendencia predominante de la tradición aristotélico-escolástica es restringir la aplicación del número al mundo material. Ya Leibniz había pregonado la transcendentalidad del número (en el sentido escolástico de "transcendental": lo que trasciende categorías determinadas y es universal). Husserl y Frege recogen esta idea con entusiasmo y extraen las obvias consecuencias. Para Frege, si el número se aplica a todo tipo de objetos, y si se entiende por lógica una teoría de objetos en general (lo que más propiamente llamaríamos ontología), es claro que la aritmética está íntimamente ligada a la lógica (el llamado logicismo). Husserl, con diferencias terminológicas, dice lo mismo.

Pero más allá de estas coincidencias, las divergencias entre ambos autores, en lo que se refiere a la filosofía del número, son notables. Estas diferencias, que examinaré a continuación, han sido prácticamente ignoradas en la literatura secundaria, pese a ser mucho más importantes que la

tan trillada cuestión del psicologismo, que Frege denunciaba en Husserl. El tema del psicologismo se basa, en cierta medida, en un malentendido de parte de Frege, que resumiré brevemente antes de pasar al examen de las filosofías del número de ambos autores.

Husserl trabaja con una idea tradicional según la cual entre los predicados dichos de un objeto los hay más o menos "internos" o "externos"; por ejemplo, "ser hombre" es interno, "ser visto por una persona" es externo. Con el fin de consolidar la universalidad irrestricta del número, Husserl quiere que lo que él llama "multitudes concretas", que son los puntos de partida de su filosofía del número, sean absolutamente arbitrarias, como lo manifiesta en la elección de su ejemplo: el conjunto constituido por la luna, Napoleón, el color rojo. En la medida en que Husserl entiende por propiedades de un objeto a las propiedades más o menos internas, francamente se comprende que le resulte difícil encontrar una propiedad común a objetos tan dispares como los tres citados. Exigir comunidad de alguna propiedad o concepto en el sentido de internos, entre los elementos de toda multitud concreta, sería entonces una limitación a la deseada universalidad del número. Por esto, evidentemente, Husserl acude al acto psicológico de abarcar con nuestra mente a los objetos que integran una multitud concreta como único recurso que permite, sin excepción, constituir conjuntos absolutamente arbitrarios, no limitados a la existencia de propiedades "internas" que sean comunes a sus elementos. El lector de la Reseña de Frege no percibe esta función de los actos psíquicos y ve a éstos como mera "intrusión de la psicología en la lógica", para usar la frase de Frege en el último párrafo. No sólo Frege omite la indicación del verdadero motivo del recurso a los actos psíquicos sino que tampoco anota que el mismo Husserl reconce explícitamente que, si se permiten como predicados también a los "externos", entonces se podrá encontrar un predicado común para cualquier multitud, incluso la más disparatada (cf. mis *Studies*, notas 99, y 100 del capítulo 3). Está claro entonces que, en la medida señalada, la acusación fregueana de psicologismo es injusta.

Pasando a las filosofías del número desarrolladas por Husserl y por Frege, y considerando primero a Husserl, éste parte de "multitudes concretas" (*concrete Vielheiten*), como la susodicha: {la luna, Napoleón, el color rojo}. Por abstracción se asciende a una "multitud abstracta", en que cada elemento de la multitud concreta es reemplazado por algo que podríamos describir como "unidad fantasma", que Husserl llama "algo",

Etwas de modo que el ejemplo mencionado se transforma en {algo, algo, algo}. He aquí al número tres.

Frege ofrece un análisis muy diverso. En *primer* lugar, rechaza vehementemente la posibilidad misma de realizar el paso abstractivo de la multitud concreta a la presunta multitud abstracta; si se hace abstracción de las diferencias entre la luna, el color rojo y Napoleón, diría Frege, se obtiene en todo caso *un* algo, pero no tres algos. En *segundo* lugar, Frege dice que el número natural es un objeto, no un concepto, si bien es un objeto que tiene la peculiaridad de estar siempre vinculado a conceptos; todo número natural *n* es número *de* un concepto; los números se presentan, en primera instancia como "números de conceptos": n(apostol): 12, n(satélite natural de la tierra): 1, etc. En *tercer* lugar, Frege quiere especificar la naturaleza de estos objetos que son los números naturales, de una manera que confirme que esa naturaleza es puramente lógica, que no depende de intuición alguna, ni siquiera *a priori* (este empeño anti-kantiano prevalece en Frege desde el principio de su obra hasta casi el final). Para determinar la naturaleza de los números Frege procede en dos fases: 1) empieza por definir la condición en que dos números son idénticos: n(F) = n(G) si y solamente si F ~ G, donde F ~ G significa que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de objetos que caen bajo F y el análogo para G. Como Frege observa, esto aún no dice nada sobre la naturaleza de n(F) o de n(G). Frege llena esta laguna a continuación mediante la definición nominal que sigue: n(F) $\doteq$ {X / X ~ F}, o sea el número del concepto F es el conjunto de conceptos X tales que X ~ F. El número tres, entonces, es un conjunto de conceptos, uno de los cuales tendrá que ser aquel concepbo bajo el cual caen exactamente los objetos la luna, Napoleón y el color rojo.

Así, mientras para Husserl el número tres es la multitud abstracta {algo, algo, algo}, para Frege es una multitud de cierto tipo de conceptos. Veamos ahora las críticas que pueden formularse para cada una de estas filosofías del número.

La *primera* objeción a la concepción defendida por Husserl (aparte cuestiones de falta de originalidad) es que el presunto proceso abstractivo que debe conducir de una multitud concreta a una abstracta es algo muy poco claro. En *segundo* lugar, el examen detenido del texto husserliano muestra que hay una cierta ambigüedad o confusión en lo que concierne a la extensión del concepto *número*. Si bien se espera que número

sea solamente la multitud abstracta, resulta también que las multitudes concretas son números. En *tercer* lugar hay confusión también en si los números son objetos o conceptos; por un lado la identificación de 3 con la multitud abstracta {algo, algo, algo} sugiere que los números son objetos, pero por otro lado Husserl también dice que los números son conceptos (predicados) que se predican de multitudes (*Philosophie der Arithmetik*, cap. 9, mis *Studies* 3.63). Estas multitudes, según la confusión anterior, pueden ser tanto abstractas como concretas.

De estas tres críticas a Husserl, la primera, relativa a la abstracción, está vigorosamente formulada por Frege en su reseña. Las otras dos son críticas de obvio espíritu fregueano y revelan defectos debidos a la ausencia en Husserl de la teoría de la predicación más fina a que ya había llegado Frege. Frege, en su reseña, señala el desconocimiento, por parte de Husserl, de la distinción entre *Merkmal* (nota) y *Eigenschaft* (propiedad) (p. 186 de KS) y el no haber utilizado Husserl la distinción entre caer bajo un concepto y subordinación (p. 179 de KS). Husserl, al poner orden entre sus nociones (multitud concreta, multitud abstracta, etc.) parece conocer y utilizar solamente una relación, a la que llama "caer bajo", que parece algo vaga y confusa.

En cuanto a las críticas que pueden formularse con respecto a la filosofía del número de Frege, la más importante se refiere al método mismo que Frege emplea. Una de las preguntas cruciales que se le pueden plantear a nuestro autor es: ¿por qué elige, como denotación del término singular 'n(F)', la clase de equivalencia $\{X / X \sim F\}$? ¿Por qué no otro objeto cualquiera, por ejemplo la ciudad de Buenos Aires? Consideremos los ejemplos siguientes: n(x es mes del año), n(x es apóstol), n(x es satélite natural de la tierra). ¿Puedo asignar al primero la ciudad de Buenos Aires, al segundo mi zapato izquierdo, al tercero la ciudad de Buenos Aires otra vez? La respuesta es negativa, porque esto no respetaría la condición previa, a saber $n(F) = n(G)$ si y solamente si $F \sim G$. Pero asignemos entonces a "n(x es satélite natural de la tierra)" el objeto Aconcagua y la dificultad desaparece. ¿Por qué la clase de equivalencia (relativa a la relación de equivalencia que es la correspondencia biunívoca entre los conjuntos de objetos que caen bajo conceptos) es "mejor" para ser un número que la ciudad de Buenos Aires o mi zapato izquierdo? Si se contesta que Frege busca objetos "lógicos", no materiales, también podrán encontrarse objetos lógicos distintos de la clase de equivalencia, quizás el com-

plemento de ésta. No veo que haya respuesta alguna a estas preguntas en Frege; se trata de *su* método, como nos lo dice en *Grundlagen der Arithmetik*, sección 63, que volverá a reproducir sin titubeo alguno en la sección 10 de *Grundgesetze der Arithmetik* para definir no ya número sino *conjunto*.

Husserl critica y rechaza con fuerza el método de Frege, al que llama "de equivalencia". Emplea palabras fuertes: "No puedo entender cómo este método significa un enriquecimiento de la lógica. Sus resultados son tales que sólo podemos sorprendernos de que alguien lo haya tomado como verdadero siquiera fugazmente". Pese a esta enérgica protesta, no parece que Husserl acierta a señalar el verdadero defecto del método que critica, que creo es el indicado más arriba, a saber la falta de razón para elegir un objeto más bien que otro. Husserl se pierde en acusaciones de que "lo que el método permite definir no son los contenidos de los conceptos dirección, forma, número [éstos son los ejemplos de Frege en *Grundlagen* 64 ss.] sino sus extensiones" (en la sección "Freges Versuch" de *Philosophie der Arithmetik*).

Para terminar quisiera aludir a la posibilidad de recoger algo bueno de cada uno de nuestros dos autores, dejando lo que no es bueno. Husserl, como Cantor y la tradición filosófica en general, acierta en entender a los números como *abstracta*, es decir como resultados de operaciones abstractivas, pero no acierta en la manera de entender el mecanismo de la abstracción, ya que concibe a ésta como abstracción de la naturaleza particular de cada elemento del conjunto inicial. Frege, por su parte, acierta en explicitar la relación de equivalencia adecuada ("equinumerosidad" entre conceptos) pero no atina a ver en esa relación la infraestructura o trampolín para llevar a cabo, bien, la abstracción que los otros habían querido hacer pero hacían mal.

Lo correcto sería entonces, partiendo de los conjuntos o conceptos iniciales, cuyo número (*Anzahl*, cardinal, etc.) hay que definir, especificar la relación de equivalencia (en este caso correspondencia biunívoca entre objetos que caen bajo los conceptos o entre los miembros de los conjuntos) y luego hacer abstracción, no en el modo torpe de toda la tradición (hasta Cantor y Husserl incluidos) sino en el sentido de restringir nuestro lenguaje a enunciados invariantes con respecto a la relación de equivalencia elegida. Esta síntesis de elementos positivos en ambos autores —que rescata las intenciones abstractivas de la tradición que culmina en

Cantor y Husserl pero realiza la abstracción correctamente— es el "método de abstracción", divulgado en numerosas publicaciones de P. Lorenzen y la "escuela de Erlangen", y que yo he contrastado tanto con la "abstracción tradicional" como con el método que he llamado "de mirar en torno" (*looking around*) que es, a mi juicio, el que Frege emplea para definir al número (y a los cursos de valores) y que tendrá su apogeo, luego, en Carnap (*Meaning and Necessity*) y en otros.

Con Peano empezó la consideración de la abstracción seriamente en el marco lógico-matemático. Pero estos balbuceos fueron inmediatamente sofocados por el método rival del mirar en torno, el cual no solamente ha dominado la escena (Frege, Russell, Carnap, etc.), sino que incluso a menudo se ha disfrazado del método opuesto (muchas veces se habla de "definiciones por abstracción" cuando lo que se hace es "mirar en torno").

Un caso interesante, entre muchos sin duda, para observar la tensión entre ambos métodos a nivel de praxis matemática, se ofrece en la obra de Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, *Análisis Matemático*. Los autores empiezan por definir relaciones de equivalencia (1,5) como base para explicar las "definiciones por abstracción" (1,6), donde expresan interés genuino por los "procesos de abstracción" y conciben a las relaciones de equivalencia como manera de "formalizar matemáticamente" esos procesos abstractivos. Al igual que Frege en *Grundlagen* 64, enfatizan que "la relación de equivalencia no nace de la comunidad del carácter abstracto, sino que la engendra. Por ejemplo, no podemos definir la semejanza como igualdad de forma, pues es justamente la relación de "semejanza" la que permite introducir la noción de "forma". Cada relación de equivalencia permite definir por abstracción un nuevo concepto" (ibid.). Todo esto podría leerse en el sentido del método abstractivo, pero pronto se advierte que los autores, como muchos otros, han sucumbido bajo el peso de la extraña tradición, en la historia de la lógica matemática, que llama "definición por abstracción" al método de Frege, que *oficialmente* no tiene de abstracción nada. (Subrayo "oficialmente" porque de hecho hay una abstracción cumplida en el mero hecho de que no interesa qué objeto se elige, con tal de que satisfaga a la condición de identidad previa.) Así, los autores del tratado citado, en vez de profundizar el análisis del proceso abstractivo en que parecen tener un gran interés, saltan sin más al otro método, eligiendo clases de equivalencia o representantes dentro de éstas como los entes abstractos deseados.

UNIVERSIDAD DE AUSTIN, TEXAS

Bibliografía

Angelelli, Ignacio: *Frege and abstraction*, en Philosophia Naturalis, 21, 1984, 453-471.

Angelelli, Ignacio: *Studies on G. Frege and traditional philosophy*, Dordrecht, 1967.

Frege, G.: *Begriffsschrift*, ed. por I. Angelelli, Hildesheim, 1964.

Frege, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884. Edicion del centenario, preparada por Ch. Thiel, Hamburgo, 1986.

Frege, G.: [KS] *Kleine Schriften*, ed. por I. Angelelli, Darmstadt, 1967.

Frege, G.: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg, 1976.

Husserl, E.: *Philosophie der Arithmetik*, Halle-Saale, 1891.

Frege, G.: reseña de Husserl, *Philosophie der Arithmetik* reimpresa en Kleine Schriften, 179-192.

Frege, G.: *Grundgesetze der Arithmetik* I, Jena 1893.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A.: *Análisis matemático*, vol. 1, Buenos Aires, 1969 (octava ed.).

ABSTRACT

After pointing out some of the coincidences between Frege and Husserl about the philosophy of numbers and paying less attention to the subject of psychologism, in order to understand the differences between the authors, the analysis that each one made on the nature of number are described, showing the most evident divergencies. Inmediately afterwards, three objections are examined regarding Husserl's position and a crucial criticism is formulated against Frege's method, related to the one discussed by Husserl. Lastly, it is assumed that it is possible to offer a method of analysis that gathers together the most important aspects of both authors points of view and leaving out the most noticeable defects.