ACERCA DE LA NATURALEZA Y EXISTENCIA DE LOS OBJETOS MATEMATICOS

GREGORIO KLIMOVSKY

¿Cuáles son las entidades de las que la matemática se ocupa y cuál es su naturaleza? La llamada "aritmetización de la matemática", comenzada por Descartes y Fermat con la llamada "geometría analítica", mediante la cual la geometría quedaba reducida al álgebra y al análisis, y concluida entre otros por Weierstrass, Cantor, Dedekind y Peano recurriendo a la denominada "aritmetización del análisis", parecía desplazar este problema a la cuestión de cuál es la naturaleza de los números naturales. Pues, mediante la metodología cartesiana, era posible traducir el lenguaje de la goemetría a afirmaciones acerca de los números reales; a su vez, éstas podían interpretarse como aserciones acerca de números racionales, las que admiten reformularse en términos de números enteros, para finalmente proceder a una reducción final en términos de números naturales. Es claro, pues, si se admite la legitimidad de tal proceso, que el interrogante filosófico acerca del fundamento ontológico de la matemática queda contestado si se puede caracterizar adecuadamente la esencia de los números básicos, los números naturales.

Pero, a poco que se examine con cuidado la estructura de este proceso de arimetización, se advierte que es necesario dar cuenta, además de los números naturales, de otras entidades menos conspicuas en el panorama de la matemática tradicional; nos referimos a los conjuntos. La aritmetización es imposible de llevar a cabo sin diponer de la noción de "conjunto". Por ejemplo, en la etapa de la reducción que corresponde a la geometría analítica, un punto del espacio de tres dimensiones se entiende como una terna ordenada de números reales. Los componentes de la terna sí tienen carácter numérico, pero una terna ordenada, ¿qué es? En una de las estrategias logicistas habituales, en este caso debida a Kuratowsky, una terna ordenada es la cupla ordenada que tiene por primer término a otra cupla ordenada formada por el primer y segundo componente de la terna dada, y por segundo componente el tercero de la terna. Una cupla ordenada, a su turno, es un par o conjunto binario (no ordenado) constituido por un par formado por el primer y segundo término del par dado, y cuyo segundo término es el conjunto unitario cuyo único componente es el primero de la cupla. En una palabra, en la reducción

cartesiana, los puntos se transforman en conjuntos.

Algo análogo ocurre en las demás etapas del proceso total de aritmetización. Si se adoptan los métodos de Dedekind, los números reales se convierten en cortaduras efectuadas (o existentes) en el conjunto de los números racionales. Pero una cortadura es un par ordenado cuyos términos son ciertos conjuntos de números racionales. Es decir, de acuerdo con esto, los números reales son conjuntos. Si se adopta algún otro método, como el de Cauchy por ejemplo, los números reales pueden verse como sucesiones infinitas de números racionales. Pero las sucesiones son funciones y éstas, o bien se reducen a conjuntos de pares ordenados o bien constituyen, como en las estrategias utilizadas por Church o Curry entidades tan problemáticas como los propios conjuntos, de los cuales es —por otra parte— muy difícil diferenciarlas.

Y, finalmente, las reducciones de los racionales a los enteros o de los enteros a naturales, recurren a la teoría de las definiciones por abstracción en el sentido moderno de la palabra. Más precisamente, los números enteros resultan ser "clases de equivalencia" definidas a partir de una relación entre cuplas ordenadas de números naturales. Finalmente, la contestación a la primera parte de nuestra pregunta inicial es que la matemática se ocupa de números naturales o de conjuntos (en general, de conjuntos de números naturales).

Esto parece plantear un problema inesperado a los fundamentadores de la matemática que utilizan como arma de esclarecimiento ontológico a la aritmetización de la matemática. Pues, aunque superficialmente puede parecer la noción de "conjunto" más sencilla que la de número natural, es claro que ha planteado más dificultades que esta última. A primera vista, la noción de conjunto es simple, intuitiva y clara, correspondiendo tal vez a la de extensión de una propiedad o atributo. Pero, en tanto los números naturales no han provocado dificultades especiales en el desarrollo de la aritmética, los conjuntos han llevado a paradojas y antinomias.

Puede hacerse una observación que tal vez quite dramatismo a esta situación. Es necesario señalar que, desde un punto de vista epistemológico, los pasos de la "aritmetización de la matemática" no parecen ser más que elucidaciones (en el sentido de Carnap). Lo que se logra es definir entidades que se comportan isomórficamente a las entidades matemáticas clásicas. es decir, se construyen conjuntos cuyas propiedades formales son idénticas a las de las entidades geométricas o analíticas. Para el matemático puro o para el que necesita la matemática desde un

punto de vista instrumental (un físico, por ejemplo), esas elucidaciones bastan. Además, tienen el atractivo metodológico de unificar todas las ramas de la matemática, y ése tal vez sea uno de los méritos mayores de la teoría de conjuntos. Pero desde un punto de vista filosófico quizá esto no baste, pues lo que se desea es saber qué son los números o los entes matemáticos, y no cómo es posible construir o inventar objetos que se comportan de manera parecida o análoga. En cierto sentido, es posible entender los esfuerzos de Husserl en *Filosofía de la artitmética* como un intento de fundamentación epistemológica y no de elucidación. Y lo propio puede decirse de la obra de Frege y de Russell.

Es posible, sin embargo, colocarse en una posición más parecida a la de Hilbert o Skolem, para los cuales no existe algo ontológicamente predeterminado que sea "las entidades de la matemática" cuya esencia haya que descubrir. Lo único que hay es lenguaje, vocabulario, palabras usadas sin un significado preciso pero acerca de las cuales existen reglas de manipulación y relaciones formales, todo esto acompañadas por intuiciones e imágenes imprecisas que constituirán un elemento extraño y dispensable para lo que importa, que son las propiedades sintácticas de las expresiones matemáticas. Si así fuese, sólo sería posible elucidar, y habría que tener tolerancia ontológica para las distintas formas de hacerlo, cada una de las cuales puede tener sus peculiares méritos instrumentales. El punto de vista de Carnap en *Sintaxis lógica del lenguaje* y en "Empirismo, semántica y ontología" es en cierto modo ése (y tal vez ésta sea una de las razones por las cuales los verdaderamente interesados en una fundamentación filosófica de la matemática, en el sentido "tradicional" del término, no aprecian demasiado su epistemología).

Pero las dificultades planteadas por los conjuntos no se limitan a la aritmetización de la matemática. En el caso de la obra de Husserl antes citada, o en las contribuciones de Frege y Russell, se intenta dar con la naturaleza esencial de "número natural" y, de un modo u otro, la idea de conjunto interviene sola o fundamentalmente. Para Russell los números naturales son conjuntos de conjuntos, para Frege conjuntos de propiedades, para Husserl abstracciones obtenidas a partir de pluralidades. A pesar de las diferencias, discrepancias e incompatibilidades entre estos personajes, los une un curioso destino: la problemática idea de "conjunto" interviene en su epistemología fundamental.

Hay que decir en este punto que acerca de estos tópicos existieron puntos de vista contrapuestos. Leopold Kronecker, por ejemplo, fue partidario de no intentar fundamentar los números naturales, pues argüía

que no había elementos filosóficamente más simples con los que explicarlos. Para que este punto de vista fuese compatible con la aritmetización de la matemática, sería necesario mostrar que, con los números naturales solamente, y sin emplear conjuntos, es dable fundamentar lo restante. Esto, en principio, no tiene nada de absurdo, pues usando propiedades aritméticas elementales es posible definir pares y cuplas, sucesiones finitas, sucesiones ilimitadas y otras entidades significativas de la aritmética general (también se pueden utilizar métodos goedelianos de codificación). Pero, aunque de este modo sea posible fundamentar los enteros y los racionales, estos procedimientos tienen un límite infranqueable. No es posible definir así la teoría de los números reales, el análisis y la geometría ordinaria. Lo cual, además de ser un perjuicio para la física —que no puede prescindir de estos instrumentos para sus investigaciones y en particular para la construcción de la teoría de la medición y para el análisis dimensional—, sería negativo desde un punto de vista matemático interno. Pues esto llevaría no a proporcionar una explicación filosófica de esta ciencia, sino a dar consejos cuyo propósito sería mostrar que casi toda la matemática es absurda, salvo una mínima parte. Por ello, aparentemente, no habría más remedio que emplear conjuntos, y sería necesario fundamentar filosóficamente su empleo.

Desgraciadamente, hoy sabemos que sólo es posible contar con "teorías axiomáticas de conjuntos". Hay muchas de ellas, diversas e incompatibles. El teorema de Goedel de 1931 las alcanza a todas (o al menos, a todas las que permiten reconstruir la aritmética), de modo que no sabemos si son consistentes o no. Para evitar círculos viciosos de carácter epistemológico, está claro que la lógica subyacente no debe ser una teoría de conjuntos ni algo equivalente (como una lógica de orden mayor al primero o una teoría de tipos). La lógica elemental de predicados es tal vez lo indicado y suficiente para esto. Las variables individuales toman como valores a conjuntos o a individuos si los hay, y los predicados elementales (como pertenencia) se suponen no ser entidades, sino modos de decir. El problema aquí es de qué estamos hablando al emplear tal lenguaje, y por qué se adoptan o no determinados principios.

En *Filosofía de la aritmética*, Husserl distingue entre "representación propia" y "representación impropia o simbólica" de conceptos. Los primeros serían aquellos cuyo contenido puede conocerse directamente sin mediación de signos, en tanto los otros serían aquellos cuyo contenido requiere para su conocimiento el empleo de signos (cuyo conocimiento a su vez es directo o propio). Como bien lo muestra Torretti en su ensayo

sobre el citado libro de Husserl, en el problema de la fundamentación de la aritmética y en el análogo para conjuntos, los conceptos impropios constituyen un verdadero dolor de cabeza. Acerca de los conjuntos infinitos, nadie dudaría que se trata de conceptos impropios. Aun con los conjuntos finitos, si su "numerosidad" es muy grande, Husserl se ve obligado a reconocer el carácter "virtual" del concepto en el sentido de que no es posible por medio de las propiedades semióticas del signo "actualizar" *ya* el contenido. De ser así, los signos de una teoría de conjuntos serían impropios y en general virtuales.

Pero hay una dificultad. Husserl parece no considerar como posible la presencia, en una teoría científica, de signos que no sean propios ni impropios, a los que no corresponda una noción y cuyo único papel es ayudar formalmente a armar la teoría. En el caso de los sistemas hipotético-deductivos de la ciencia fáctica, la interpretación instrumentalista de la teoría haría de los "términos teóricos" simples auxiliares formales para poder construir predicciones de puro carácter empírico. De modo análogo, los signos de una teoría de conjuntos (salvo tal vez algunos correspondientes a conjuntos finitos "actuales") pudieran ser sólo signos instrumentales, escapando de la clasificación de Husserl tanto en el caso de "propio-impropio" como en el de "actual-virtual". Esto presenta ciertas dificultades.

Podría decirse, en apoyo a Husserl, que estos signos instrumentales son en realidad un tipo de signos virtuales. Pues alguna teoría de conjuntos debe ser "cierta", en cuyo caso los signos pasarían a tener designación y de este modo serían impropios actuales o virtuales en el sentido del autor de *Filosofía de la aritmética.* La dificultad es que es poco claro cómo puede saberse esto. Probablemente el único camino sea un tipo de intuición que indique cuál es la teoría privilegiada. Pero, en vista de la poca suerte de los métodos intuicionistas en la historia de la ciencia, y en particular de los fracasos de este tipo en lo referente a "teorías intuitivas" de conjuntos como las de Frege o Cantor, parece que esto no es admisible. Tampoco lo es sostener que cada teoría corresponde semánticamente a una "ontología regional" y que sus signos son impropios virtuales para conceptos correspondientes a esta ontología. Por empezar, ése es un bocado demasiado grande para ser ingerido por alguien que no sea "platonista"; pero lo grave es el hecho bien conocido de que si una teoría de orden uno admite un modelo entonces admite infinitos. Además, las teorías de conjuntos no poseen categoricidad; si hay un modelo existen infinitos otros no isomórficos (por ejemplo, los que involucran una aritmética no estándar).

En realidad, lo que actualmente se considera una fundamentación de la matemática, por prudencia lógica o metafísica se percibe en principio como conteniendo simbólos de conjunto análogos a los "símbolos incompletos" de Russell: no designan, pero contribuyen a formar el discurso. Pero si es así (lo que coincidiría con la línea de Hilbert y Skolem), el problema que importa es el de la consistencia. En cuanto a la aplicabilidad, lo único requerido es que *parte* de la teoría y del vocabulario esté constituida por símbolos actuales, tanto desde un punto de vista aritmético como físico.

Pero es claro entonces que para ello, y para evitar círculos viciosos —como ya antes señalamos—, el metalenguaje con el que epistemológicamente se estudia la teoría de conjuntos que se esté considerando debe no ser conjuntístico. Esto es algo difícil, aparentemente imposible, si se considera que en el discurso de la sintaxis es necesario hablar de sucesiones de signos (expresiones), sucesiones de sentencias o fórmulas (deducciones o demostraciones), concatenaciones, conjuntos de signos o de fórmulas. Desde ya, semánticas como las usuales —por ejemplo, en la teoría de modelos— son imposibles sin emplear conjuntos. Pero es conocido que parte importante de la sintaxis se puede "aritmetizar"; en realidad, la sintaxis elemental y la aritmética elemental son prácticamente la misma cosa. Como lo muestra Kleene, la teoría de las expresiones, con sus identidades, concatenaciones y sustituciones, es una generalización de la aritmética de Peano en la que en lugar de una única operación de "sucesor" hay varias (tantas como signos); la aritmética ordinaria sale como caso particular, aquel en que hay un solo signo (es decir, una única operación de "sucesor"). Inversamente, mediante los sistemas goedelianos de codificación, la sintaxis queda sumergida en la aritmética elemental. Curiosamente, esto nos dice que finalmente, el problema de fundamentar la matemática (y, simultáneamente, la teoría de conjuntos), es verdaderamente la cuestión de justificar la aritmética. Sólo que, en virtud de lo dicho, debe tratarse de una fundamentación totalmente autónoma, sin el menor empleo de métodos ajenos, entidades extrañas y, en particular, de conjuntos.

A nuestro entender, la única posibilidad es la intentada por la escuela "neointuicionista". Cuando nos referimos antes a Kronecker, la criticamos como punto de vista un tanto limitacionista. Pero, como instrumento para fundamentar la teoría sintáctica de los signos, parece un buen lugar de partida. Sin duda, se trata de una concepción "mentalista", no psicologista, en que los números aparecen como estados de un proceso

siempre continuable y nunca acabado. Según una cita de Heyting, "de acuerdo con Brouwer, la matemática es idéntica a la parte exacta de nuestro pensamiento... ninguna ciencia, en particular ni la filosofía ni la lógica, puede ser presuposición para la matemática. Sería un círculo vicioso aplicar algún principio filosófico o lógico como medio para una prueba, pues las concepciones matemáticas ya estarían presupuestas en la formulación de tal principio". "No hay otra fuente que una intuición, que coloca sus conceptos e inferencias delante de nuestros ojos de manera inmediatamente clara". "No es otra cosa que la facultad de considerar separadamente conceptos particulares e inferencias que se presentan regularmente en el pensamiento ordinario". "La idea de la serie de los números naturales puede analizarse basada en esa posibilidad, primero considerando un objeto o experiencia como dada a nosotros independientemente del resto del mundo, segundo distinguiendo algo así de otro, y tercero imaginando una repetición ilimitada del segundo proceso".

Tal vez sea redundante repetirlo, pero el formalismo de Hilbert funcionó acorde con estas ideas de Heyting en lo que hace al punto de partida sintáctico. Una vez en posesión de este primer instrumento, es posible construir lenguajes formales en los que aparezcan signos correspondientes a otros niveles de la matemática. Creemos que éste es el camino apropiado desde un punto de vista epistemológico.

Después de las críticas de Frege contra la *Filosofía de la Aritmética* de Husserl, era posible pensar en un triunfo de los puntos de vista un tanto platonistas u objetivistas de la escuela logicista. El propio Husserl modificó su opinión. Vistas las cosas un tanto superficialmente, podría pensarse que los argumentos fregeanos furon contundentes y que la primitiva posición mentalista del autor de ese texto era endeble e ingenua. Pero las antinomias lógicas y la llamada "crisis de la fundamentación de la matemática" hizo percibir a su vez la debilidad de la posición de Frege. A la luz de la cita de Heyting, puede considerarse que ciertos aspectos de las ideas de Husserl iban por el buen camino. En particular, la idea de generación de conjuntos virtuales considerando objetos o conjuntos de partida y agregando por pasos nuevos objetos que no han sido considerados, para generar así la serie indefinida de los números naturales, no parece muy distante de las tácticas mentalistas constructivas de los intuicionistas.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES