LOS INDECIBLES DE FREGE Y SU FILOSOFIA DE LA MATEMATICA*

MARIA ASUNCION PREISSER RODRIGUEZ

Mi objetivo en este trabajo es analizar ciertas afirmaciones que Lourdes Valdivia efectúa en su artículo "Lo indecible en Frege"[1] así como mostrar la conexión de algunos principios analizados por ella con otros principios del sistema de Frege y con su filosofía de la matemática en general. Trataré de hacer ver que quien aceptara las afirmaciones de Valdivia como sugerencias para resolver ciertas dificultades que ella analiza, aceptaría destruir el sistema que Frege creó. Así, en I recordaré brevemente algunos rasgos del sistema de Frege y en II mostraré que la relación entre los principios de éste es tal que abandonar alguno de ellos (como pudiera extraerse del texto de Valdivia) implicaría abandonar gran parte de ellos, teniendo como consecuencia el desmoronamiento del sistema filosófico y teórico de Frege.

I

La concepción que, parece ser, guió todo el trabajo fundamentador de Frege es la creencia, fuertemente defendida por él, de que la matemática[2] es una ciencia verdadera y objetiva cuyo fundamento no se encuentra ni en la experiencia ni en la intuición. Bajo tal creencia, Frege tuvo que rechazar el empirismo de J. S. Mill y las filosofías formalistas y psicologistas de su época, que en caso de ser aceptadas arrojarían fuertes dudas acerca de la verdad objetiva de la matemática. Paralelamente, Frege trató de demostrar que los enunciados matemáticos no son sintéticos a priori sino analíticos, en el sentido de que se derivan exclusivamente de la lógica y definiciones (aunque para Frege 'la lógica' no es lo que hoy se entiende como tal). Es bajo esta perspectiva que veo el análisis lingüístico que Frege realizó.

* Quiero agradecer a Raúl Orayen su disposición para leer este trabajo y para discutirlo conmigo. Agradezco también sus sugerencias.

[1] *Análisis Filosófico*, Vol. IV, (1984), pp. 1-17.

[2] Para Frege la geometría sí podía fundamentarse en la intuición. Por ello, de aquí en adelante me referiré sólo a la aritmética y al análisis cuando use la palabra 'matemática'. Se entiende que para Frege toda disciplina matemática es objetivamente verdadera.

Cuando Frege analizó las tesis de las corrientes en filosofía de la matemática a las que se opuso, se vio forzado a efectuar un análisis del lenguaje en el que se formulan los enunciados matemáticos o aparecen palabras acerca de números. Este análisis estuvo influido en todo momento por su creencia más fuerte: la creencia en la verdad objetiva de la matemática. Realizó este análisis con la actitud (al menos en principio) de tomar las afirmaciones matemáticas tales como son y luego tratar de inferir cómo debe ser la ontología para que resulten verdaderas, o aun tenga sentido preguntarse por su verdad o falsedad.

Es la mezcla de sus rechazos, adhesiones y actitudes lo que llevó a Frege a analizar el lenguaje tal como lo hizo.

De su posición al empirismo de Mill y del análisis de las palabras para números, Frege obtiene una tesis esencial de su sistema: los números son objetos (en caso de existir), no son propiedades de cosas físicas, sus nombres no son predicados bajo ninguna circunstancia.

De su oposición al formalismo estricto aunada a sus consideraciones acerca de la igualdad, obtiene la distinción nombre-sentido-referente y la interpretación de que una igualdad entre nombres afirma coincidencia o identidad de referentes.

Frege toma como nociones básicas las de *objeto* y *función*. Los números son objetos y las funciones matemáticas son *algunas* de las funciones de su sistema (pues la noción fregeana de función es más amplia que la noción matemática correspondiente). Las nociones básicas del análisis matemático son para Frege las de *número* y *función*.

Del análisis de las expresiones lingüísticas para números y funciones —tomando en cuenta sus conclusiones bajo la creencia que lo guió y los resultados de sus críticas a las otras corrientes filosóficas— obtiene una división categorial entre los nombres de objeto (saturados) y los nombres de función (no-saturados). La división categorial es proyectada a la ontología. *Función*[3] y *objeto* forman categorías excluyentes y exhaustivas de la ontología y a la vez las expresiones antes subrayadas son primitivas de su sistema. Entre los objetos están los números y entre las funciones están aquellas que Frege llamó conceptos.

La tesis de que los números son objetos está basada, por una parte,

[3] Estrictamente hablando no hay únicamente dos categorías, pues hay multitud de categorías de funciones. Yo englobo a todas estas categorpías bajo la categoría de 'función' para simplificar la exposición del texto.

en que sus nombres son completos[4] y nunca funcionan como predicados. La tesis de que los conceptos son funciones se debe a que sus nombres son no-saturados y a ciertas tesis sobre las oraciones y los valores veritativos.

Funciones y objetos no pueden mezclarse nunca; nombres completos e incompletos nunca podrán denotar algo de la misma naturaleza; los denotados de los nombres de función y los de objeto (los numerales entre éstos) tienen naturalezas completamente diferentes. Si en una expresión significativa que contiene un nombre de objeto reemplazamos por éste un nombre de objeto, la expresión posee significado. Si en vez del nombre de objeto insertamos un nombre de función, la expresión carece de significado. Sucede algo análogo si la expresión compleja contiene un nombre de función. Sólo nombres de la misma naturaleza pueden ser intercambiados en una oración.

Además de las tesis mencionadas, hay algunas otras que también juegan un papel importante en la red del sistema filosófico de Frege (de hecho, las tesis no pueden ordenarse linealmente pues forman un todo entrelazado). Entre tales tesis se encuentran: la expresión constituida por un nombre entre comillas es saturada; el denotado de una oración declarativa es un valor veritativo (que es un objeto).

II

Sabemos que en el sistema de Frege, como en muchos otros, hay resultados inquientantes sobre la imposibilidad de efectuar afirmaciones que tengan un carácter realmente universal. Mas no sólo sucede esto. Lourdes Valdivia en el artículo citado, muestra en tres puntos específicos de tal sistema la imposibilidad de formular ciertos enunciados que serían necesarios para el mismo Frege. Lo que para ella causa este resultado inconveniente es la distinción categorial que Frege impone a la ontología y el paralelismo lingüístico-ontológico que sostiene. Este paralelismo que-

[4] En la etapa constructiva formal (*Grundgesetze*) los números son objetos porque son objetos lógicos al ser *werthverlaufe* de funciones fregeanas llamadas conceptos. El hecho de que sean objetos está garantizado porque los *werthverlaufe* y tales funciones son parte de la lógica según Frege. Sin embargo, el argumento de que los números son objetos porque sus nombres son completos (saturados) y nunca funcionan como predicados es un argumento muy importante para la obra global de Frege (*Grundlagen* y otros).

dará expresado por lo que Valdivia llama 'el SSO'[5]. Son ciertas afirmaciones que efectúa Valdivia en dos puntos lo que me interesa discutir. Estos se refieren, respectivamente, a la imposibilidad de nombrar conceptos en singular y a la imposibilidad de ofrecer condiciones de identidad para funciones. Valvidivia trata un punto más, que no tocaré aquí.

a. Antes de exponer las conclusiones de Valdivia acerca de la imposibilidad de nombrar conceptos, presentaré el problema como Benno Kerry se lo manifestó al mismo Frege[6] y haré algunas observaciones.

Del concepto denotado por 'es un caballo' podemos desear afirmar que es un concepto, o bien que es un concepto fácilmente asequible. Pero 'el concepto *caballo*' es una expresión que ha sido completada y por tanto su referente debe ser un objeto. Entonces 'el concepto *caballo*' no refiere a un concepto sino a un objeto según las reglas del sistema de Frege, y así hay una imposibilidad de referirnos a conceptos en singular o de expresar pensamientos acerca de ellos. Frege responde que esto se debe a una inadecuación de nuestro lenguaje que nos obliga a apartarnos de lo usual cuando queremos afirmar algo de los denotados de expresiones no-saturadas y al hacerlo obtenemos expresiones saturadas.

Un objeto cae bajo un concepto en 'Trueno es un caballo'; un concepto *no* cae bajo otro en 'El concepto *caballo* es asequible', sino que el objeto denotado por 'el concepto *caballo*' cae bajo un concepto. Frege tiene razón en el sentido de que para referirnos a un caballo utilizamos su nombre llanamente sin ocasionar problemas y, sin embargo, cuando queremos referirnos a un concepto utilizamos expresiones saturadas como 'el concepto *caballo*' que según la teoría de Frege debe denotar a un objeto.

Para que este resultado paradójico desapareciera, podría haber dos caminos de solución, al menos a primera vista: o bien escribir el nombre del concepto del que afirmamos algo llanamente, sin 'el' ni 'concepto' (expresar la oración con un ingrediente que es no-saturado, a saber: 'es un caballo'), en cuyo caso la afirmación no posee como referente a un valor veritativo sino algo no-saturado; o bien, como Benno Kerry sugirió a Frege, admitir ocasiones en que los conceptos pueden ser objetos.

En el primer caso estaríamos ante una afirmación que no es verdade-

[5] "A toda expresión semántica incompleta corresponde un denotado (*bedeutung*) de la misma naturaleza; a toda expresión semánticamente completa corresponde un denotado de igual naturaleza".

[6] Para esto ver: Frege, G. "Sobre Concepto y Objeto".

ra o falsa formalmente (porque para Frege si hay "huecos" en una oración, no puede decirse que toma algún valor veritativo) pero sí lo es intuitivamente. Si, para resolver esto, se aceptara que una oración abierta en un caso especial como éste puede denotar un valor veritativo (un objeto), podríamos tener que el pensamiento intuitiamente expresado no violaría los requerimientos del sistema modificado de Frege, pues en tal sistema ya se habría dado la aceptación de esa circunstancia especial. Pero una excepción tal para expresiones abiertas violaría los análisis de Frege —y sus conclusiones— respecto a las expresiones para números y funciones; ya que en caso de admitir como referente de expresiones no-saturadas a un valor veritativo (un objeto), no se ve por qué un número no pueda ser el referente de una expresión tal como un predicado (no-saturado) y entonces los números podrían ser propiedades de cosas físicas. Admitiendo la excepción, Frege pierde un argumento muy importante. El argumento es: los números son denotados por expresiones saturadas, luego no por expresiones no-saturadas; luego no por predicados, luego no son propiedades. En esto hay una premisa implícita: lo denotado por algo saturado no puede ser denotado por algo no-saturado. Si admitimos la excepción mencionada anteriormente, admitimos la refutación de la premisa implícita y entonces los números podrían ser propiedades. Con esto se estaría admitiendo la posibilidad de una de las principales tesis del empirismo de Mill que, como vimos, Frege no podía aceptar. Por tanto una expresión no-saturada no puede denotar lo mismo que una expresión saturada (en este caso, una oración abierta no puede denotar a un valor veritativo) so pena de destruir tesis esenciales de Frege y con ello gran parte de su sistema o su totalidad. La rigidez en la relación saturado-objeto, insaturado-función y en la división categorial entre expresiones tiene un gran peso en la argumentación de Frege en contra de que los números sean propiedades de cosas físicas.

La segunda posibilidad, admitir ocasiones en que los conceptos pueden ser objetos, fue rechazada por Frege como era de esperarse. Los argumentos que proporciona en "Concepto y objeto" están fuertemente dirigidos a mantener la distinción categorial establecida en su sistema. Es fácil ver que sin esa distinción los números podrían ser referentes de expresiones no-saturadas (predicados), tanto como los conceptos, al ser tomados como objetos, podrían ser referentes de nombres completos. Sin el paralelismo lingüístico-ontológico y las distinciones categoriales Frege no podía asegurar que los números no son referentes de predicados. Podríamos pensar que esto no es grave ya que no tenemos certeza acerca

de lo que son los números y las funciones. Pero Frege no podía aceptar la propuesta de Kerry. Frege ya había construido un complejo sistema para establecer que los números son objetos y además objetos lógicos para así fundamentar la matemática, y parte del significado de la palabra 'objeto' es que los objetos no son denotados de expresiones no-saturadas. La distinción categorial y el paralelismo lingüístico-ontológico son piedras angulares del sistema filosófico y formal de Frege.

Con esta perspectiva analizaré lo que L. Valdivia dice al respecto.

b. Lourdes Valdivia afirma que el resultado paradójico de no poder nombrar conceptos se deriva de lo que ella llama el Supuesto Semántico Ontológico (SSO) y de la tesis de que entidades[7] saturadas y no saturadas pertenecen a categorías diferentes. El SSO es formulado como sigue:

> "A toda expresión semánticamente completa corresponde un denotado (*bedeutung*) de la misma naturaleza; a toda expresión semánticamente incompleta corresponde un denotado de igual naturaleza"[8].

Brevemente, el argumento de Valdivia es el siguiente[9]: dado el (SSO) no podemos afirmar que 'el concepto *caballo*' es un concepto ya que el 'concepto *caballo*' al ser una expresión completa denota un objeto, no un concepto. Pero es justamente que deseamos expresar un pensamiento acerca de un concepto, y no de un objeto. Esto es paradójico porque la expresión había sido construida de manera tal que tenía que denotar a un concepto.

Valdivia afirma:

> "En este momento es interesante señalar que la paradoja resulta del (SSO), pues este supuesto proporciona la premisa de que una misma entidad no puede ser denotada por una expresión saturada ('el concepto denotado por la expresión "es un caballo"') y una no-saturada ('es un caballo'), lo cual se sigue del (SSO) y la tesis de que entidades saturadas y no-saturadas son excluyentes. Llegamos así a la afirmación paradójica de que expresiones como 'el concepto *caballo*', etc. no nombran conceptos. Este es el primer "indecible" al que nos llevan las distinciones categoriales de Frege: existe un concepto denotado por la expresión '—es un caballo' pero si lo queremos nombrar para afirmar algo de él, por ejemplo, que es una *función* de un argumento, no podemos. Si no se postula el (SSO) obviamente esto no se seguiría, pues expresiones de categorías distintas estarían "autorizadas" a nombrar lo mismo, y una expresión completa estaría "autorizada" a nombrar algo incompleto"[10].

[7] Para ver cómo Valdivia utiliza la palabra 'entidad' ver: Valdivia, L. "Lo Indecible en Frege", p.4 nota 9.
[8] Valdivia, L. op. cit. p. 3.
[9] Cf. Valdivia, L. op. cit. pp. 7-9.
[10] Valdivia, L. op. cit. p.9.

La última oración del párrafo citado puede sugerir que con suprimir el (SSO) el problema estaría resuelto y el sistema de Frege sería viable. Pero, como hice notar anteriormente, si se suprime el (SSO) y la distinción categorial, cae el argumento filosófico principal para que los números no sean propiedades. En efecto, si suprimimos la distinción categorial, las expresiones saturadas y no-saturadas pueden mezclarse e intercambiarse en oraciones o en su uso; si suprimimos el (SSO), expresiones saturadas pueden nombrar funciones y expresiones no-saturadas pueden nombrar objetos. Si es así, los números pueden ser nombrados por predicados. Además de lo anterior, los valores veritativos no serían objetos necesariamente, ni los conceptos fregeanos las referencias de expresiones no-saturadas. Con esto, si aceptáramos abandonar el (SSO) y las distinciones categoriales deberíamos abandonar las siguientes tesis fregeanas: los números son objetos; los valores veritativos son los referentes de oraciones completas y por tanto son objetos; las funciones poseen "algo" no-completado; los *werthverlaufe*[11] son objetos, etc.

Es claro que el significado de las expresiones *función* y *objeto* en el sistema de Frege depende en su mayor parte de las distinciones categoriales y del paralelismo lingüístico-ontológico que él estableció. Si abandonamos estas tesis, estamos cortando de raíz gran parte de tal sistema, a tal grado que quedaría nada o casi nada de él. Me interesa recalcar la importancia de tales tesis y el hecho de que en ese sistema la mayoría de las tesis están engranadas con las demás de modo que al suprimir alguna de ellas se suprime mucho más de lo que a primera vista podría parecer.

Existe otra posibilidad, aparentemente, para resolver el problema expuesto anteriormente: aceptar que una expresión tal como 'el concepto *caballo*' no es una expresión completa, sino incompleta (abierta). Esto violaría los análisis de Frege acerca de los nombres propios y los que no lo son, y en especial de la expresión 'el número uno' no podría concluirse que denota a un objeto. Son claras las consecuencias de esto.

El (SSO) no es un supuesto ingenuo (como afirma Valdivia[12]) o aislado, tampoco lo es la tesis que establece la división categorial entre las expresiones lingüísticas. Ambas están conectadas con otros supuestos vitales para el sistema de Frege. La distinción *función-objeto* y el que los números sean objetos le darán a Frege un sustento filosófico esencial para que los números sean más convincentemente *werthverlaufe* de concep-

[11] Tomo la palabra alemana que en inglés es 'value ranges' y en español es 'extensión' o 'rango de valores'.

[12] Cf. Valdivia, L. "Lo Indecible en Frege", p.2.

tos, sean objetos lógicos y la matemática sea objetiva y verdadera al fundamentarse en la lógica. La distinción *función-objeto* se apoya en el (SSO) y la distinción categorial entre expresiones lingüísticas.

c. En el mismo artículo Valdivia expone otra circunstancia paradójica que para ella proviene del (SSO) y las distinciones categoriales de Frege. El punto que analizaré es el siguiente.

Valdivia demuestra la imposibilidad de tener criterios de identidad usuales para las funciones dentro del sistema de Frege. Grave suceso ya que las funciones son, junto con los objetos, entidades básicas de tal sistema. No se les puede definir y tampoco se podrá dar condiciones de identidad. Esto último es imposible porque dado que objetos y funciones pertenecen a categorías diferentes, lo que se predica de un elemento de una categoría no puede predicarse de un elemento de otra categoría.[13] La igualdad se aplica a objetos y por tanto no puede aplicarse a funciones.[14]

Valdivia concluye:

> "Sin las distinciones categoriales, Frege hubiera podido aceptar el criterio de identidad de funciones más usual. Por ejemplo, como sugiere Rullon Wells, podría haber sostenido que las expresiones 'x(x-4)' y 'x^2 -4x' denotan la misma función, aunque cada una de ellas o cada *nombre de función*, expresan distintos sentidos. Así, la solución natural se llevaría a cabo reemplazando las *funciones* fregeanas por sus extensiones (a eso equivaldría asumir el criterio usual de identidad). El mismo Frege advirtió esta vía de solución, aunque evidentemente no optó por ella debido a sus distinciones categoriales, basadas en el (SSO). El segundo "indecible" en la teoría fregeana, es pues, la formulación de criterios de identidad para *funciones*."[15]

Por una parte, Valdivia tiene razón en que si se suprime el (SSO) y las distinciones categoriales se podría tener el criterio usual de identidad y resolver el problema mencionado. Sin embargo, como hemos visto, al anular tales tesis, los números podrían ser denotados de expresiones nosaturadas (predicados) y así ser propiedades, entre otras consecuencias. He ya mencionado, al final de la sección precedente, algunas de las tesis que deberían abandonarse en caso de suprimir el (SSO) y las distinciones categoriales. También mencioné la importancia de tales supuestos para la obra de Frege y cómo se desvanecería sin ellos.

[13] Cf. Valdivia, L. op. cit. pp. 10-13.

[14] Frege reconoció esto explícitamente en, por ejemplo, "Consideraciones Sobre Sentido y Referencia", p. 92.

[15] Valdivia, L. "Lo Indecible en Frege", p. 12.

Por otra parte, hay más razones por las cuales Frege no podía aceptar que 'x(x-4)' y 'x^2 -4x' denotaran la misma función con distintos sentidos, o bien que '—es animal racional' y '—es miembro de la especie que ha creado guerras durante miles de años' o '—es centauro' y '—es unicornio' denotaran a un mismo concepto con sentido diferente, respectivamente. Frege se encuentra aquí encarado entre lo formal de su sistema y cierta intuición que posee el que usa el lenguaje, incluyendo a Frege. Si vemos a 'x(x-4)' y 'x^2 -4x' como dos reglas a seguir, son diferentes. Si vemos a los conceptos de cada par mencionado, cada miembro del par es diferente al otro miembro. Hay argumentos intuitivos en contra de dar, en general, la condición de identidad propuesta en el artículo de Valdivia, ya que intuitivamente los conceptos mencionados difieren. Cada función es, como regla, diferente a otras por una intuición no plasmada en ninguna tesis formal o filosófica del sistema (aunque en ciertas elucidaciones informales parece que Frege razona de esta manera). Lo único que podemos igualar es la extensión de las reglas. En el caso de los conceptos sucederá algo análogo pues son funciones fregeanas.

Ahora, al no aceptar la posibilidad de tal identidad para conceptos o funciones en general, sí se presenta un hecho paradójico ya que dos conceptos pueden ser iguales en el sentido usual cuando son sinónimos y no podemos afirmar tal igualdad. El caso límite sucede cuando ni siquiera podemos afirmar la igualdad usual de una función —o concepto— consigo misma; o bien, afirmar la diferencia usual entre dos conceptos o dos funciones (como reglas a seguir). Tales resultados son consecuencia de las distinciones categoriales de Frege que, como vimos, no podemos violar sin destruir su teoría.

Resulta entonces que no pueden establecerse condiciones de identidad para funciones. Esto es un problema pues, como Valdivia afirma, ya que *objeto* y *función* son interdependientes ("Objeto es todo aquello que no sea función"[16]), para poder saber si algo es un objeto o una función necesitamos recurrir a condiciones de identidad que no tenemos, o no podremos saber cuándo algo no nombrado es un objeto o una función.[17] Además, como hemos visto, no podemos afirmar la diferencia entre dos funciones. Tal diferencia estaría dada por el análisis de sus nombres, cuando éstos existan. Este problema permanecerá si no se suprimen las distinciones categoriales de Frege; pero si aceptamos suprimirlas destruimos su sistema.

[16] Valdivia, L. op. cit. p.6.
[17] Cf. Valdivia, L. op. cit. pp. 6-7.

Si mi interpretación de las funciones como reglas a seguir o maneras de actuar[18] es correcta, la diferencia entre funciones se da al analizar las expresiones lingüísticas y sin embargo formalmente no pueden diferenciarse debido a una distinción categorial que proviene, asimismo, de consideraciones filosóficas profundas de Frege. Hay argumentos intuitivos para diferenciar las reglas, lo cual va de acuerdo con el proceder de Frege. Pero esa diferencia no puede establecerse formalmente. Por otra parte, algunas funciones fregeanas sí pueden ser iguales (algunos conceptos, por ejemplo) y no podemos formalizar esto debido a tesis muy importantes de Frege.

Creo que queda claro que no puede rechazarse el (SSO), aisladamente o no, sin afectar de raíz la obra de Frege. Recordemos, una vez más, que la distinción categorial y el paralelismo lingüístico-ontológico apoyan el que los números no son propiedades de cosas físicas. Si fuere así, el empirismo de Mill entraría de lleno en la matemática y así tendríamos una matemática basada en la experiencia que Frege no podía aceptar por los problemas que se suscitan en cuanto a la verdad de, por ejemplo, las afirmaciones que contienen la noción del infinito. Asimismo, toda la construcción formal de Frege en la que los números son *werthverlaufe* de conceptos (objetos porque sus nombres son saturados) no tendría ya sentido alguno. Los *werthverlaufe* no tendrían por qué ser objetos, entre otras consecuencias dentro de este terreno de la obra de Frege.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ABSTRACT

This paper is a commentary upon the article 'Lo indecible en Frege' by Lourdes Valdivia (*Análisis Filosófico*, vol. IV (1984), pp. 1-17). Valdivia analyses three main difficulties in frege's system and points out that all of them arise because of frege's acceptance of a principle that Valdivia calls 'SSO' (the semantic-ontological supposition). I try to show that giving up SSO cannot provide a way out of the difficulties because the principle is so connected with other parts of frege's system that giving it up implies destroying the system.

[18] Literalmente, Frege no podía aceptar la expresión 'maneras de actuar' ya que, como R. Orayen me lo indicó, eso sugiere un antropomorfismo. Sin embargo, uso esa expresión pues me parece que en muchas ocasiones Frege tomó implícitamente un proceso a seguir expresado por nombres de funciones.

BIBLIOGRAFIA

Frege, G. "Consideraciones Sobre Sentido y Referencia", incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. *Estudios Sobre Semántica*, Trad. U. Moulines, Ariel, España, 1973.

Frege, G. "Función y Concepto", incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. Introducción a las *Leyes Fundamentales de la Aritmética*; incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. *Los Fundamentos de la Aritmética*, Trad. U. Moulines, Ariel, España, 1972.

Frege, G. Prólogo a las *Leyes Fundamentales de la Aritmética*; incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. "¿Qué es una función?", incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. "Sobre Concepto y Objeto", incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. "Sobre Sentido y Referencia", incluido en Gottlob Frege: *Estudios Sobre Semántica.*

Frege, G. "Sources of Knowledge of Mathematics and Natural Sciences", incluido en Hermes et al (ed.), *Gottlob Frege: Posthumous Writings.*

Frege, G. *The Basic Laws of Arithmetic,* University of California Press, Berkeley-Los Angeles, 1967.

Hermes, Hans et al (ed.), *Gottlob Frege: Posthumons Writings*, Basil Blackwell, Oxford, 1979.

Resnik, Michael, *Frege and the Philosophy of Mathematics,* Cornell University Press, N. York, 1980.

Valdivia, L. "Lo Indecible en Frege", *Análisis Filosófico*, SADAF, Vol. IV, N° 1, mayo 1984, pp. 1-17.