ARTICULOS

LOS WERTVERLÄUFE DE FREGE Y LA TEORIA DE CONJUNTOS[1]

RAUL ORAYEN

Frege es considerado el precursor de la reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos. Hay justicia en esta opinión: los matemáticos de hoy reducen conceptos numéricos a conceptos conjuntísticos siguiendo ciertas estrategias lógicas inauguradas por Frege. Sin embargo, no es clara la relación entre la lógica de Frege y la teoría de conjuntos. Frege no formuló una *teoría de conjuntos*, en un sentido más o menos moderno de esta expresión. Sencillamente no usó la noción de *conjunto*, tal como la empleamos hoy. La noción fregeana que más se asemeja a la de *conjunto* es su concepto de *extensión* (que se define en su teoría como el *Wertverlauf* de un concepto); pero ha sido señalado con frecuencia que este concepto no coincide con el de *conjunto*. No me ocuparé aquí de este punto porque pienso que la literatura reciente lo ha dejado suficientemente establecido.[2] Me interesa otra cuestión: ¿cómo puede haber influido Frege sobre la teoría de conjuntos, si había ese alejamiento conceptual al que hemos aludido? Los lógicos solemos dar una respuesta más o menos vaga: Frege no dispuso de una teoría de conjuntos, pero hizo algo *formalmente similar* y empleó conceptos *con funciones parecidas* al de *conjunto*. Creo que esta contestación es esencialmente exacta y me propongo elaborarla con más precisión en este ensayo. En la sección 1 mostraré cuál es la relación entre la noción de *extensión* fregeana y la de *conjunto*, mostrando cómo la primera puede cumplir la tarea de la segunda. En la sección 3 mostraré que la teoría de Frege contiene un modelo de una teoría de conjuntos de mucha importancia en la reconstrucción de la teoría clásica (intuitiva) de conjuntos. Tal teoría es el llamado 'cálculo ideal', que presentaré brevemente en la sección 2. Las secciones 1 y 3 se complementan para dar una

---

[1] Este trabajo aparecerá en una colección de ensayos sobre Frege que publicará UNAM; en esa versión se ampliarán algunos pasajes y se dará una prueba formal de algunas demostraciones de la sección 2. Para la presente versión, me fueron de mucha utilidad comentarios lógicos de Adolfo García de la Sienra acerca del primer manuscrito. También he sacado provecho de algunas observaciones del Dr. Bernabé Navarro sobre la terminología de Frege en alemán.

[2] Ver, por ejemplo, Rosado Haddock, *Exposición crítica de la filosofía de Frege*, pp. 119-22 (doy las referencias completas de las obras que cito al final).

idea clara de cómo se conecta la lógica de Frege con la teoría de conjuntos, e incluso permiten visualizar *cuál* es la teoría de conjuntos con la que se conecta más directamente.

1. Extensiones fregeanas y conjuntos

Las nociones de *función* y *Wertverlauf* son primitivos de la teoría de Frege; *concepto* y *extensión*, son, en cambio, casos particulares de la primera y segunda noción, respectivamente, y se definen con ayuda de ellas. No haré un tratamiento detallado de las explicaciones que da Frege de estos conceptos, porque este tema ha sido analizado con frecuencia;[3] me limitaré a recordar algunos puntos esenciales y a algunas observaciones adicionales sobre aspectos relevantes de las nociones fregeanas.

La noción de *función* de Frege tiene un parecido importante, y una diferencia importante, con la noción de función que usaban los matemáticos de su época (cuando la noción de *función* no había sido reducida conjuntísticamente). El parecido consiste en que, en ambos casos, una función asigna, a cada entidad de cierto *dominio*,[4] una entidad determinada, siendo la asignación unívoca, en el sentido de que a cada entidad del dominio se la asigna *una* sola entidad. Según la terminología usual, las entidades del dominio (a las que se asignan otras entidades) son los *argumentos* de la función; las entidades que se asignan a las primeras son los *valores* de la función. La entidad *b* que una función *f* asigna a *a* es el valor de *f para* el argumento *a*. Hasta aquí hay semejanza total, incluso en la terminología, entre Frege y el matemático de su época. Pero surge una diferencia crucial cuando se toca la cuestión de las condiciones de identidad de las funciones. Para el matemático (y en este respecto no hay diferencia con el matemático de nuestros días), las funciones *f* y *g* son idénticas si y sólo si dan los mismos valores para los mismos argumentos.[5] Ejemplo: la función x^2 y la función x . x son la misma. Frege no acepta estas condiciones de identidad. Ha habido cierta vacilación al respecto en su obra. A veces, como en 'Function and

---

[3] Ver, por ejemplo, Rosado Haddock, *op. cit.* Una presentación breve y filosóficamente muy sugestiva de las nociones fregeanas se halla en L. Valdivia, 'Lo indecible en Frege'.

[4] El *dominio* de una función se concibe de maneras diferentes en diferentes teorías (por ejemplo, en la lógica de Frege y la moderna teoría de conjuntos). Uso aquí el término de manera neutral (para poder comparar teorías heterogéneas), y con el significado vago de *grupo de entidades a las que se aplica una función*. 'Entidad', que no es término fregeano, se usa de manera neutral similar, con el sentido de *unidad ontológica*, de cualquier tipo o categoría.

[5] A lo largo del artículo entenderé siempre que la frase 'las funciones *f* y *g* dan los mismos valores para los mismos argumentos' implica la cláusula '*f* y *g* tienen el mismo dominio de argumentos'.

Concept', parece creer que dos funciones que dan los mismos valores para los mismos argumentos (su ejemplo allí son las funciones $x(x - 4)$ y $x^2 - 4x$) pueden ser *diferentes;* en otras oportunidades, como en 'Comments on Sense and Meaning', sostiene que la noción de identidad no es *aplicable* a funciones, que por ende no podrían ser ni idénticas ni diferentes (*i.e.* no idénticas). De todos modos, algo queda inalterado a través de estas vacilaciones: ya sea que tenga sentido o no aplicar la identidad a las funciones, lo cierto es que *dar los mismos valores para los mismos argumentos* no es condición suficiente para la identidad de funciones fregeanas. No hay garantía alguna de que $x(x - 4)$ y $x^2 - 4x$ sean la misma función. Podemos aceptar la ecuación,

(1) $x(x - 4) = x^2 - 4x$

pero lo que se afirma en ella, según Frege, es simplemente

(2) $(x)\ [x(x - 4) = x^2 - 4x]$

que, a su vez, lejos de afirmar que dos funciones son idénticas, se limita a decir que, cualquiera sea el x elegido, aplicarle la primera función dará el mismo valor que aplicarle la segunda. A pesar de su apariencia, (1) no es de la forma 'a = b', en dónde 'a' y 'b' son términos singulares; es, en realidad, una afirmación general, equivalente a (2), cuya apariencia es menos engañosa.

Es sumamente incómodo trabajar con funciones cuyas condiciones de identidad no se conocen (y a las cuales quizás ni siquiera puede aplicárseles la noción de identidad). Frege introduce entonces otras entidades que tienen condiciones de identidad similares a las que ha rechazado para las funciones. Son los *Wertverläufe*.[6] Cada función tiene un *Wertverlauf*. Dos funciones que dan los mismos valores para los mismos argumentos tienen el mismo *Wertverlauf*.

Para facilitar mi exposición, haré una restricción en mi tratamiento, e introduciré también alguna simbología. La restricción es la siguiente: sólo me ocuparé de las funciones fregeanas monádicas que pueden aplicarse a *objetos* (*i.e.*, aplicables a entidades cualesquiera que no sean funciones). En terminología fregeana: sólo consideraré las funciones *de primer nivel de un lugar de argumento*. 'f', 'g' y 'h' serán variables de funciones del tipo especificado; exactamente las mismas letras, con exponentes, se usarán como constantes de funciones (a menudo indeterminadas, es decir que su relación con las letras sin exponentes será similar a la que tienen las constantes individuales 'a', 'b', etc.,

[6] Me parece que las traducciones corrientes tienen connotaciones engañosas y me he acostumbrado a usar el término alemán.

con las variables 'x', 'y', etc., en la teoría cuantificacional). El *Wertverlauf* de la función f se denotará con

$\alpha' f \alpha$ (puede usarse otra letra griega)

y con la ayuda de esta notación podemos formular las condiciones de identidad de *Wertverläufe*, antes expresadas en palabras, de la siguiente manera:

(3) $\alpha' f \alpha = \beta' g \beta \leftrightarrow (x)(fx=gx)$

La fórmula (3) nos dice que el *Wertverlauf* de una función f es el mismo que el de una función g cuando *ambas funciones dan los mismos valores para los mismos argumentos*. Frege se había negado a considerar que la condición formulada (en cursiva) fuera suficiente para la identidad de funciones; sí, en cambio, es una condición necesaria y suficiente para la identidad de los *Wertverläufe* correspondientes.

Dije antes que las funciones fregeanas se parecían a las de los matemáticos de la época en que eran asignaciones unívocas de entidades a las entidades de cierto dominio; diferían, en cambio, en que no tenían las mismas condiciones de identidad que las funciones de los matemáticos. Analizando ahora los *Wertverläufe*, podemos llegar a una observación interesante. Los *Wertverläufe* también asignan entidades a las entidades de cierto dominio de manera unívoca. Podemos considerar que el *Wertverlauf* $\alpha' f \alpha$ asigna a cada argumento de f una cierta entidad: el valor de f para ella. En un ejemplo concreto: $\alpha' \alpha^2$ asigna a 3 lo mismo que la función cuadrado (de la que es *Wertverlauf*), o sea 9. Un lector podría objetar que un *Wertverlauf* no tiene una sola función asociada (puede ser el *Wertverlauf* de funciones distintas, o al menos de las que no podemos decir que son iguales), en cuyo caso puede haber ambigüedad respecto de cuál es la entidad que asigna a una entidad dada (según la función que se tenga en cuenta). No existe este peligro. La condición de identidad *de Wertverläufe* expresada por (3) garantiza que las funciones que tienen el mismo *Wertverlauf* dan los mismos valores para los mismos argumentos. De modo que los *Wertverläufe* se parecen a las funciones de los matemáticos contemporáneos de Frege en que son asignaciones unívocas de entidades, a las entidades de cierto dominio. Las funciones de Frege también tenían este rasgo, pero diferían de las matemáticas en condiciones de identidad; los *Wertverläufe* se *parecen* a las funciones matemáticas en ese aspecto. En efecto, la fórmula (3) y nuestra explicación del sentido en que los *Wertverläufe* son asignaciones unívocas de entidades, conducen a la conclusión de que dos *Wertverläufe* son idénticos si asignan las mismas entidades a las mismas entidades. El resultado de este análisis es que los

Wertverläufe de Frege se parecen a las funciones matemáticas de la época *más* que las funciones de Frege. Esta observación, que ha pasado inadvertida para muchos críticos, no pasó desapercibida para el propio Frege. En 'Function and Concept', p. 26, nota, aclara que muchas veces los matemáticos llaman 'función' a lo que *él* denomina '*Wertverlauf*'. No aclara el porqué de esa observación, pero supongo que la reflexión que he hecho aquí sobre las condiciones de identidad fue decisiva.[7]

Será importante para nuestro análisis posterior recordar que los *Wertverläufe* son las entidades frageanas más similares a las funciones de los matemáticos de la época. Obsérvese que nunca los hemos definido. Sólo sabemos que los *Wertveläufe* son como asignaciones de entidades a entidades, y que dos *Wertverläufe* se identifican cuando asignan las mismas entidades a las mismas entidades. Me parece clarificante el análisis de Alfonso Avila al respecto.[8] Los *Wertverläufe son como vinculaciones puras entre objetos: Wertverläufe* que hacen las mismas vinculaciones son idénticos. Las funciones, por contraste, son como *maneras* de vincular objetos, y dos funciones pueden arrojar la *misma* vinculación pero llegar a ella de maneras *diferentes*, en cuyo caso no son la misma función. Las funciones no tienen entonces las mismas condiciones de identidad que los *Wertverläufe*. Como dije antes, *función* y *Wertverlauf* son primitivos de Frege, y no parecen fáciles de caracterizar dentro del marco conceptual fregeano.

La noción de *función* de los matemáticos de la época tampoco se definía,[9] pero los rasgos que se les atribuían coinciden con los rasgos básicos de los *Wertverläufe*, y ésa es la razón principal por la cual hice la afirmación inicial de este párrafo.[10]

Para Frege, el *concepto* es un caso particular de función. El concepto *hombre* es una función, que aplicada a Sócrates da el valor *verdad* y aplicada al perro Fido

---

[7] Frege también advirtió que los *Wertverläufe* asignaban entidades a entidades, con la mediación de las funciones de que eran *Wertverläufe*. Esto le permitió introducir su operador '$\cap$', que aplicado a una entidad *a* y un *Wertverlauf b* arroja la entidad *c* que es el valor de las funciones que corresponden a ese *Wertverlauf* para el argumento *a*. Ver Frege, *The Basic Laws of Arithmetic*, p. 92.

[8] Ver Alfonso Avila, 'Sobre la noción fregeana "Extensión de un concepto"'.

[9] Recuérdese que pienso en una etapa en la que las funciones no se reducían a (no se definían como) conjuntos de pares. Muchos autores han interpretado que los *Wertverläufe* fregeanos eran conjuntos de pares ordenados, en cuyo caso serían *idénticos* a las *actuales* funciones matemáticas. Pero mostré en *La ontología de Frege* que esta interpretación era defectuosa, y Alfonso Avila mejora mi argumento en su trabajo.

[10] Con todo, no puede haber identificación de los *Wertverläufe* con esas funciones, debido a algunos rasgos de los conceptos usados por Frege (como su exigencia de que el dominio de una función agote una categoría entera). Sólo es plausible afirmar una gran similitud, y a eso me limito.

da el valor *falsedad*. Un concepto es como una herramienta que permite clasificar en dos grupos los objetos del mundo. Si el concepto no es vacío, da el resultado *verdad* cuando se aplica a algunos objetos; eso ocurre cuando el concepto se ha aplicado a objetos que caen bajo él. Aplicado a los objetos restantes, el concepto dará *falsedad* como resultado. En general, y siempre restringiéndonos a funciones de primer nivel, puede decirse que un concepto es una función monádica cuyo valor para cualquier objeto es un valor de verdad. Los conceptos *unicornio* y *centauro* dan los mismos valores para los mismos argumentos, porque (creemos) dan siempre la falsedad como valor. Pero de acuerdo con lo expresado sobre condiciones de identidad de funciones, no necesitamos identificarlos (lo cual está de acuerdo con la tradición intensionalista). Pero sin duda comparten la misma *extensión* (la clase vacía). Y de acuerdo con la fórmula (3) también comparten el mismo *Wertverlauf*. Sin más apoyo que esta coincidencia en condiciones de identidad, Frege propone considerar que la *extensión* de un concepto es el *Wertverlauf* del mismo. Distintos autores han señalado que esta noción fregeana de *extensión* no coincide con la noción clásica de *extensión* ni con el concepto moderno de *conjunto*.[11] La discrepancia básica es la siguiente: clásicamente, la extensión de un concepto está "formada" ontológicamente por las entidades a las que el concepto se aplica. La extensión del concepto *hombre* está constituida, de alguna manera, por los hombres. Cuando la extensión es identificada con el *Wertverlauf* del concepto, como lo hace Frege, su constitución ontológica cambia. Siguiendo a Avila, la extensión, al ser un *Wertverlauf*, es una "vinculación" entre entidades (con prescindencia de la manera en que se llegó a ella). En el caso del concepto *hombre*, su extensión fregeana (el *Wertverlauf* de tal concepto) será una vinculación entre cada hombre y la verdad, y cada entidad que no es un hombre y la falsedad. La estructura de esta entidad es más compleja que la de la extensión clásica: mientras esta última sólo está constituida, de alguna manera, por los hombres, la extensión fregeana comprende una infinita serie de conexiones entre hombres y no hombres, con la verdad y la falsedad, respectivamente. El lector puede pensar que estamos haciendo consideraciones metafísicas vagas sobre conceptos lógicos y matemáticos. Creo que es precisamente lo que estoy haciendo en este pasaje. Pero creo también que ilumina el uso de los conceptos lógicos y matemáticos hacer una reflexión sobre los rasgos ontológicos de las entidades abstractas a las que se intenta hacer referencia mediante tales conceptos.

He tratado de explicar algunos rasgos básicos de las nociones fregeanas de *función*, *Wertverlauf*, *concepto* y *extensión*. He subrayado importantes similitudes entre los *Wertverläufe* y las funciones de los matemáticos de la época de

[11] Ver, por ejemplo, texto y páginas citados en nota 2.

Frege. Luego me referí a diferencias entre la noción de *extensión* fregeana y la de *conjunto*.[12] En lo que sigue, trataré de mostrar por qué, a pesar de las diferencias entre los últimos conceptos mencionados, la noción fregeana de *extensión* puede usarse para "representar" conjuntos.

El matemático suele "representar" una clase de entidades A mediante otra clase B cuando puede construir una correspondencia biunívoca sencilla entre A y B. Los puntos de un plano se representan, por ejemplo, con pares ordenados de números reales, cuando se han elegido un sistema de coordenadas, un segmento unidad, y se han hecho ciertas convenciones de orden. Los triángulos pueden identificarse con conjuntos de tres puntos. En nuestra concepción intuitiva, un triángulo es una porción del espacio y no un conjunto de tres puntos; pero todo triángulo determina unívocamente un conjunto de *tres puntos*, cuando escogemos sus vértices; recíprocamente, dados tres puntos cualesquiera obtenemos de ellos un único triángulo si los unimos por segmentos de recta (en cuyo caso se convierten en los vértices del *triángulo* formado). Hemos construido una correspondencia biunívoca entre triángulos y ternas de puntos. Debido a la facilidad con que podemos pasar de unas entidades a otras, el matemático suele *identificarlas*. Esto puede considerarse un error (si el matemático quiere identificar las áreas triangulares con conjuntos de tres puntos) o una convención (si el matemático, dada la correspondencia biunívoca, *desea dar un nuevo* significado a la palabra 'triángulo'). Haya error conceptual o no en el procedimiento del matemático (y creo que hay casos particulares que son diferentes en este respecto), lo cierto es que a veces, debido a una cierta correspondencia biunívoca más o menos sencilla entre las entidades A y las B, el matemático puede usar las B para propósitos que antes satisfacía con las A. Retomando a las *extensiones fregeanas* y los conjuntos, mostraré ahora que, dadas ciertas condiciones, pueden relacionarse como las B y las A de mi ejemplo abstracto.

Dado un dominio de entidades D, y dos entidades *particulares* a y b, podemos tomar en consideración todas las funciones monádicas cuyo dominio de argumentos es D y cuyo rango de valores está incluido en $\{a, b\}$ (*incluido*, y no idéntico, para *comprender* también el caso en que la función da siempre el valor a, y similarmente con b). Todos los conjuntos incluidos en D pueden ponerse en correspondencia biunívoca con las funciones descriptas con el *siguiente procedimiento*: dado el conjunto D', incluido en D, tómese la función con dominio en D que da el valor a para cada individuo de D' y el valor b para cada individuo de D que no es miembro de D'. Es obvio que se trata de una correspondencia biunívoca. Es una correspondencia sencilla, que permite fácilmente identificar

[12] Para ver *semejanzas* entre ambas nociones (descriptas de una manera distinta al tratamiento que haré aquí), ver Avila, *op. cit.*

el conjunto, dada la función y viceversa. Dada la función, el conjunto correspondiente es la parte de su dominio formada por los miembros que dan *a* como valor, al ser tomados como argumentos de la función (el procedimiento para pasar del conjunto a la función ya fue considerado). Cuando se realiza una correspondencia biunívoca entre conjuntos y funciones que tienen los rasgos descriptos, se dice que las funciones utilizadas son "funciones características" y se llama *función característica de un conjunto M* a la función característica que puede construirse a partir de M con el procedimiento indicado un poco más arriba. Las funciones características no son idénticas a los conjuntos de que provienen; pero obviamente pueden servir para "representarlos" y pueden usarse en lugar de ellos para propósitos matemáticos.

En el párrafo anterior indicamos cómo se puede construir una correspondencia biunívoca intuitiva entre un grupo de conjuntos y un grupo de funciones. Es muy importante para lo que sigue reparar en el hecho de que las funciones utilizadas cumplen una serie de condiciones que resultaron esenciales para que pudiera construirse la correspondencia descripta. La primera condición es trivial, y se desprende rápidamente del concepto de *función*: las funciones usadas hacen asignaciones unívocas de entidades, a todas las entidades de un dominio dado (por tener este rasgo, cada una de las funciones consideradas puede asignar unívocamente *a* a los individuos de cierto dominio que pertenecen a un conjunto dado y *b* a los restantes). La segunda condición es el cumplimiento de las condiciones de identidad usuales para funciones: f y g son la misma función si y sólo si dan los mismos valores para los mismos argumentos. Si las funciones utilizadas no cumplen estas condiciones de identidad, puede fracasar nuestro intento de construir una correspondencia biunívoca. En efecto, con la intención de asignar unívocamente *una* función al conjunto D', incluido en D, establecimos esta regla: a D' le corresponde la función con dominio en D que da el valor *a* para cada individuo de D' y el valor *b* para cada individuo de *D* que no es miembro de D'. Pero si dos funciones distintas pueden dar los mismos valores para los mismos argumentos, no podemos estar seguros de que asignamos una sola función a D': podría ocurrir que hubiera *dos* funciones que dieran como valor *a* para cada individuo de D que fuera miembro de D' y *b* para los restantes.

La tercera condición que cumplen las funciones que utilizamos es simplemente que el dominio de valores de cada una de ellas está incluido en un conjunto de *dos* individuos distintos, *a* y *b*. Para representar D' mediante una función, necesitábamos dos individuos distintos, que pudieran "actuar" de "signos" de la pertenencia y no pertenencia a D': si la función, aplicada a x, da *a*, x pertenece a D'; si el resultado es *b*, x no pertenece al conjunto en cuestión.

La cuarta condición que cumplen las funciones que utilizamos en nuestra correspondencia es menos trivial, a tal punto que dentro de algunas teorías de

conjuntos no pueden hallarse funciones que satisfagan el requisito. *Todos los conjuntos que "representamos" mediante ciertas funciones estaban incluidos en cierto dominio D que era común a todas las funciones consideradas.* Este hecho fue esencial para nuestro método. Hablando metafóricamente: para representar los conjuntos que considerábamos, partimos de una lista donde estaban todos los individuos que pertenecían a alguno de esos conjuntos, y para representar a D', pusimos *'a'* y *'b'*, respectivamente, al lado de nombres de la lista que correspondían a miembros y no-miembros de D'. Nuestro método falla si se toman conjuntos que no están incluidos en D. Tomemos, por ejemplo, dos conjuntos A y B, distintos entre sí y tales que ambos son disyuntos de D. El método descripto antes[13] asignaría a A y B la *misma* función (con dominio igual a D y el valor *b* para cada argumento), rompiéndose la correspondencia biunívoca. Si no se dispone de un dominio comprehensivo que agrupe a todos los miembros de los conjuntos considerados, nuestro método para representar conjuntos mediante funciones ya no resulta aplicable, y puede resultar imposible, engorroso, o inelegante, construir una nueva correspondencia biunívoca entre una serie de conjuntos bajo consideración, y funciones caraterísticas que los representen. Una teoría de conjuntos en la que nuestro método no es aplicable es la Zermelo-Fraenkel. Si quisiéramos representar cada uno de los conjuntos estudiados por la teoría mediante una función, la aplicación del método anterior requeriría que esas funciones tuvieran como dominio el conjunto de todos los conjuntos, y este último no existe, de acuerdo con un teorema de la teoría.

Hemos visto que se pueden representar conjuntos mediante funciones, si éstas cumplen cuatro condiciones que acabamos de enunciar.[14] Afirmé antes que los *Wertverläufe* de Frege son las entidades fregeanas más similares a las funciones matemáticas de su época. Básicamente, esto se debe a que, como ya he mencionado, los *Wertverläufe* se parecen a tales funciones en que (i) hacen asignaciones unívocas de entidades a las entidades de cierto dominio, y (ii) cumplen con las condiciones de identidad usuales para funciones. También vimos que el análogo en las teorías de Frege del concepto de *conjunto* es su noción de *extensión*, que se define como el *Wertverlauf* de un concepto. He reconocido unas páginas atrás que esta noción fregeana de *extensión* no coincide con la de *conjunto*. Mostraré ahora, sin embargo, que las extensiones fregeanas pueden representar conjuntos, al modo de las funciones características, por la

---

[13] En rigor, una extensión del mismo a conjuntos no incluidos en D.

[14] Estrictamente hablando, también deben cumplirse algunas condiciones adicionales: para cada conjunto D' incluido en D, y que se desee "representar", deben existir D-D' y las funciones que corresponden a los productos cartesianos D' x $\{a\}$ y D' x $\{b\}$. También deben existir las "uniones" de funciones dadas. Cuando las teorías de conjuntos usuales aceptan un conjunto D, un subconjunto D' de D, y los conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$, también aceptan las otras entidades mencionadas en esta nota.

razón siguiente: tales extensiones se comportan como funciones que cumplen las cuatro condiciones antes enumeradas, respecto de los conjuntos que habitualmente consideramos.[15]

Las extensiones fregeanas son *Wertverläufe*. Se comportan, pues, como funciones que respetan (i) y (ii), de acuerdo con las consideraciones del párrafo anterior. Pero (i) y (ii) coinciden con las dos primeras condiciones, de las cuatro que habilitan a las funciones para representar conjuntos (ver páginas anteriores). La tercera condición que debían cumplir las funciones era la de tener un dominio de valores incluido en un conjunto de dos individuos distintos, *a* y *b* (que iban a funcionar como "signos" de pertenencia y no-pertenencia). Las extensiones fregeanas también satisfacen esto, porque son *Wertverläufe* de conceptos, que por definición sólo toman como valores a la *verdad* y la *falsedad*. Veamos qué ocurre con la cuarta condición.

Si cierta teoría admite la existencia de una clase o dominio universal y permite que tal entidad sea dominio de funciones, está abierto el camino para que pueda satisfacerse en la teoría la condición número cuatro: habrá un dominio omnicomprehensivo del cual serán partes todos los conjuntos que se consideren. No hay en Frege, estrictamente hablando, una entidad tal; su ontología se divide en distintas categorías: la de los objetos, la de las funciones de primer nivel de un lugar de argumento, etc. Una función monádica sólo puede tener como dominio una de estas categorías, y no hay un dominio universal del cual sean partes todos los conjuntos que puedan considerarse. Las extensiones fregeanas (consideradas como funciones) no satisfacen la cuarta condición. Sin embargo, mientras no se consideren conjuntos en los que haya "mezcla" de categorías,[16] el método de representar conjuntos que expusimos antes será viable, al precio de una mayor complejidad: se podrá construir una correspondencia biunívoca entre los conjuntos que consideramos habitualmente (incluidos otros cuya existencia era reconocida intuitivamente por Frege) y una extensísima clase de funciones características, agrupadas en familias (una familia por cada categoría, formada por las funciones que tengan tal categoría como dominio). El método para construir la función que corresponde a un conjunto dado D', será como el antes descripto, sólo que ahora deberá añadirse una indicación acerca de cuál es el dominio D a considerar en cada caso. La indicación es sencilla: el dominio D es la categoría

---

[15] Se ha mencionado con frecuencia que las extensiones de Frege se comportan como funciones características. En este trabajo amplío esa observación, estudiando las características de esas extensiones que les permiten jugar tal papel.

[16] En la teoría de Frege, la aceptación de que una función de un lugar de argumento no puede aplicarse a entidades de distintas categorías conduce a la conclusión de que las extensiones no pueden contener "mezclas" categoriales.

a la que pertenecen las entidades que son miembros de D'. Como no se admiten "mezclas" de categorías, todos los miembros de un conjunto admisible serán de la misma categoría, y la instrucción formulada para determinar el dominio adecuado será unívoca. A pesar, pues, de que no hay *un* dominio (de funciones) del cual sean partes todos los conjuntos que Frege puede reconocer, sí existen categorías ontológicas C1, C2,...Cn..., tales que cada conjunto admisible *será parte de exactamente una de ellas*. Las categorías en cuestión pueden adoptarse entonces como dominios de funciones, y se puede establecer con el método perfeccionado una correspondencia biunívoca entre los conjuntos admisibles y una totalidad de funciones que tendrán diversidad de dominios.[17] En estas explicaciones sobre la cuarta condición, he hablado de *funciones* y no de *extensiones fregeanas*. Hice esto para mostrar la mayor generalidad de mi tratamiento; pero lo dicho se aplica a las extensiones de Frege, puesto que, como aclaré antes, se comportan como funciones de cierto tipo.

En los párrafos anteriores intenté mostrar que las extensiones fregeanas pueden "representar" los conjuntos que consideramos habitualmente, y algunos otros cuya existencia reconocía Frege de modo intuitivo. Pero, ¿cuáles son, exactamente, los conjuntos que pueden representarse en la teoría fregeana? ¿Se puede dar más precisión al aserto de que son "representables" en ella "los conjuntos que consideramos habitualmente"? Intentaré responder en lo que sigue.

Los conjuntos que consideramos habitualmente son aquellos para los cuales tenemos una *expresión genérica* apropiada, simple o compleja: 'hombre', 'ciudadano mexicano mayor de 30 años', etc. La teoría de Frege puede "representar" estos conjuntos: con una expresión genérica dada puede construirse un predicado monádico ('es un hombre', etc.); para Frege, un predicado monádico denota un concepto, y tal concepto tiene una extensión fregeana; tal extensión representa al conjunto conectado con la expresión genérica original, al modo de las funciones características. Además de los conjuntos que ordinariamente tenemos en cuenta, Frege considera otros, que surgen debido a los términos técnicos genéricos de su propia teoría. Estos conjuntos se pueden tratar de manera análoga a los anteriores. Pero si comparamos la teoría de Frege con teorías de conjuntos modernas, surge una nueva cuestión: ¿tendrá Frege una contrapartida para cada conjunto que sea postulado por una de tales teorías? El problema no es sencillo. A través del axioma de elección, por ejemplo, las teorías modernas postulan conjuntos para los cuales no existe término genérico alguno en el lenguaje. En tales casos, nuestra línea de razonamiento anterior no puede

---

[17] Esto muestra que (como era esperable) las cuatro condiciones antes formuladas (junto con el agregado de la nota 14) funcionan como suficientes y no como necesarias.

aplicarse. Dado el platonismo de Frege, su teoría no tiene reparos en "comprometerse ontológicamente" con conceptos para los cuales no exista expresión lingüística correspondiente, y entre las extensiones de tales conceptos podríamos buscar las contrapartidas de los últimos conjuntos que aludimos. Pero no está claro cómo podría demostrarse que hay entre esas extensiones algunas que correspondan exactamente a los conjuntos postulados por el axioma de elección, por ejemplo. Debido a esto, no daré por probada una respuesta afirmativa a la última pregunta planteada. Me conformo con la tesis más modesta que he defendido en las últimas páginas: la teoría de Frege ofrece contrapartidas para los conjuntos que habitualmente se tienen en cuenta y otros que suscitan su atención debido al lenguaje de su propia teoría. Más precisamente, Frege ofrece contrapartidas al menos para todo conjunto que esté determinado por expresiones genéricas del lenguaje ordinario o su propio lenguaje técnico.[18]

He tratado de mostrar que puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los conjuntos que ordinariamente tenemos en cuenta y las extensiones fregeanas. Un lector que conozca la moderna teoría de conjuntos puede pensar entonces que mi intención ha sido probar la existencia de una función biunívoca (en el sentido moderno, entendida como un conjunto de pares ordenados de ciertas características) cuyo dominio es un conjunto de conjuntos y su codominio un conjunto de *Wertverläufe*. Mi intención fue más modesta. Puede ser difícil establecer la existencia de conjuntos de pares de conjuntos y de *Wertverläufe* como los mencionados. Sólo he intentado mostrar aquí que de manera intuitiva podemos asignar a cada conjunto ordinario una extensión fregeana, única para cada conjunto, y que en tal asignación corresponden extensiones distintas a conjuntos distintos.[19] También procuré aclarar cuáles eran las características de las extensiones fregeanas que permitían tal correlación. El objetivo de todo el análisis era mostrar que si bien Frege no disponía de un concepto coincidente con el de *conjunto*, sí disponía de entidades que podían representar los conjuntos y cumplir, por ende, funciones similares a las que tienen ellos. Puede plantearse ahora el problema de si las extensiones fregeanas cumplen con los axiomas de alguna teoría de conjuntos. Las próximas dos secciones están dedicadas a esta cuestión.

---

[18] En general, esto es cierto; pero debido a las restricciones categoriales de la teoría de Frege, algunos términos genéricos no podrían tener una extensión correspondiente, estrictamente hablando.

[19] En una teoría de conjuntos dada es posible que, mediante ciertos predicados, podamos asignar unívocamente una entidad a todas las entidades que satisfacen cierta condición, y que sin embargo *no exista* una función que establezca esa correlación. Esto se debe a que, de la misma manera que hay predicados monádicos *sin* conjuntos asociados (para algunas teorías), puede verificarse lo mismo con predicados relacionales. Ver Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, *Foundations of Set Theory*, pp. 43-44.

2. El cálculo ideal

Cantor no axiomatizó la teoría clásica de conjuntos. Aun en sus trabajos más ordenados y sistemáticos (sus importantes memorias de 1895 y 1897) presentó sus ideas sin distinguir claramente entre axiomas y teoremas, o entre términos primitivos y definidos. La motivación más importante para axiomatizar teorías de conjuntos (aunque no la única) fue el deseo de librarse de las paradojas que surgían en la teoría clásica. Las teorías axiomáticas modernas, pues, contienen restricciones que se introducen con la esperanza de aventar las antinomias, y por lo tanto no se estudian habitualmente presentaciones axiomáticas de la teoría clásica, porque ya se sabe que contiene paradojas y el propósito de la axiomatización es evitarlas. Sin embargo, es de mucha importancia conceptual estudiar una versión axiomática de la teoría clásica. Si tal versión es fiel, el sistema será inconsistente. Pero disponer de la axiomatización permitirá un análisis de cuáles son los supuestos que llevan a paradojas y permitirá comparar, lógica y conceptualmente, una teoría moderna con la teoría clásica en la versión reconstruida (un intento de comparar con la teoría en su formulación original –no axiomatica– puede ser muy difícil por la heterogeneidad de los términos de la comparación). Por estas razones, tiene mucho interés el llamado 'cálculo ideal,'[20] que constituye una versión de la teoría clásica de conuntos, pero formulada axiomáticamente en un cálculo de predicados de primer orden con identidad. Si la teoría ha de ocuparse sólo de conjuntos cuyos miembros son conjuntos, el único primitivo necesario es 'ε', que se lee como 'pertenece a'. Se supone entonces que las variables sólo toman conjuntos como valores, y se introducen dos axiomas, uno de los cuales es, en realidad, un axioma esquema. El primer axioma, llamado a veces de *extensionalidad*, afirma que si dos conjuntos tienen los mismos elementos son idénticos (el condicional inverso se puede demostrar con los puros recursos lógicos de la teoría de la identidad). En símbolos:

$$(I)\ \ (x)\,(y)\,[(z)\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y]$$

El segundo axioma (o grupo de axiomas, dado su carácter de esquema) postula la existencia de conjuntos. Como no se dispone de cuantificadores sobre propiedades en la lógica de orden uno, para expresar el supuesto intuitivo de que a cada propiedad le corresponde un conjunto, se usa un axioma esquema que transmite algo más débil: a toda condición en x formulable en la teoría le

---

[20] El estudio más completo de las relaciones entre el cálculo ideal y las modernas teorías de conjuntos se encuentra en Fraenkel, Bar-Hillel y Levy *Foundations of Set Theory*. Para la formulación del cálculo, ver p. 154

corresponde un conjunto formado exactamente por los individuos que satisfacen tal condición. Simbolizando con 'Bx' una condición en x arbitraria, el esquema reza así:

(II) $(\exists y)\ (x)\ (x \in y \leftrightarrow Bx)$ (Bx no contiene variables libres distintas de 'x')[21]

Este par de axiomas puede complementarse con el agregado del axioma de elección y el de fundamentos. Si se trata de obtener algo lo más similar posible a la teoría clásica debería incluirse el de elección sin duda y sería más discutible la incorporación del axioma de fundamentos. Pero estas cuestiones no están conectadas con nuestra futura discusión y podemos omitirlas. Es más relevante considerar cómo se debe modificar el cálculo si se desea incluir en el dominio de la teoría entidades que no son conjuntos (y esto ocurría tanto con las teorías de Cantor como con varias teorías posteriores, que estudiaban universos en que coexistían conjuntos e individuos). Si hay valores de las variables que no son conjuntos, la condición de identidad del axioma I debe restringirse a conjuntos (los individuos[22] no los satisfacen: dos individuos cualesquiera serían idénticos según el axioma I sin alteración). Debe introducirse entonces un predicado monádico 'M', con el sentido de 'es un conjunto', y formularse (I) para individuos x e y que sean conjuntos. En símbolos:

(I') $(x)\ (y)\ [(Mx\ .\ My) \rightarrow\ ((z)\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)]$

Por razones que serán claras más tarde, ésta será la versión del axioma de extensionalidad que usaremos.

(II) debería reformarse de modo análogo si se desea trabajar también con individuos: antes de '$(x \in y \leftrightarrow B\ x)$' debería agregarse, en conjunción, 'My'. Lo llaremos (II') en esta formulación.

3. Los Wertverläufe y el cálculo ideal

Me gustaría decir que la lógica de Frege contiene como sub-teoría una serie de teoremas con la forma lógica de los axiomas del cálculo ideal; sin embargo, esto es imposible, porque el lenguaje de Frege es *sui generis* (no sólo notacional,

---

[21] En la obra citada en nota 19 se pueden hallar formulaciones de este axioma con parámetros (variables libres distintas de 'x' e 'y' que aparecen en Bx), y observaciones sobre la equivalencia entre las formulaciones con y sin parámetros.

[22] En este contexto, 'individuo' significa 'entidad que no es un conjunto'.

sino también conceptualmente) y sencillamente no contiene estructuras lingüísticas como las fórmulas cuantificacionales. Naturalmente, se pueden traducir sus fórmulas a fórmulas cuantificacionales equivalentes en algún sentido; pero esto es engorroso y a veces surgen dificultades debido a que la lógica de Frege hace diferencias categoriales que no se hacen en el dominio de variabilidad de un cálculo de orden uno. En lugar de mostrar algo como lo sugerido, haré otra cosa de no menos interés teórico: mostraré que con entidades fregeanas –específicamente con sus *Wertverläufe*– se puede construir una interpretación de los primitivos del cálculo ideal en que los axiomas del mismo se satisfacen, según los supuestos de Frege acerca de las entidades usadas. Dicho de otro modo: hay una interpretación de los primitivos del cálculo ideal en que esta teoría formal se vuelve una teoría acerca de entidades fregeanas, y lo que dice está de acuerdo con las teorías de Frege.[23] Más brevemente aún: se puede construir dentro de la teoría de Frege un modelo del cálculo ideal. Como las teorías de Frege no se ocupan sólo de las entidades que en su lógica hacen el papel de conjuntos, usaremos el cálculo ideal en la versión en que se utiliza el predicado 'M' y se supone que las entidades M no son los únicos valores de las variables.

El cálculo ideal tiene dos primitivos, 'ε' y 'M'. Los interpretaremos usando nociones de Frege. 'M' se definirá como las extensiones de Frege, es decir

Mx = def x es el *Wertverlauf* de una función de primer nivel de un lugar de argumento, tal que sólo toma como valores, o bien la *verdad*, o bien la *falsedad*.

Como hemos hecho antes, nos restringimos sólo a ciertas funciones de Frege, las monádicas que se aplican a objetos (en el texto de la definición usamos su terminología técnica para estas funciones). La generalización de nuestras consideraciones a las funciones restantes es trivial.[24] Podríamos haber abreviado el *definiens* usando la palabra 'concepto'; pero como luego deberemos utilizar los rasgos definicionales de los conceptos fregeanos, directamente usamos el *definiens* de esa palabra, en lugar de ella.

'ε' se definirá teniendo en cuenta la correlación que hicimos dos secciones atrás entre conjuntos y funciones características. Los elementos de un conjunto

---

[23] Para ver cómo se pueden describir en una teoría cuantificacional sin distinciones categoriales las entidades de otra teoría que sí hace tales distinciones, ver Quine, 'Unification of Universes in Set Theory'.

[24] Además es innecesaria. Para mostrar que se puede construir dentro de la teoría de Frege un modelo del cálculo ideal, basta mostrar que algunas de sus entidades forman un modelo tal, y ello se puede hacer con los *Wertverläufe* de las funciones de primer nivel de un argumento, como muestro en el texto.

eran aquellas entidades a las que la función característica asignaba *verdad* (en adelante, V). Guiándonos por esa conexión, podemos establecer esta definición:

z ε x = def x es M, y dada una función cualquiera de la que x sea *Wertverlauf*, tal función aplicada a z dará como resultado V.

Mostraremos ahora que los axiomas del cálculo ideal, interpretados de esta manera, se vuelven afirmaciones que resultan verdaderas de acuerdo con las teorías de Frege. Será crucial para nuestras demostraciones el axioma de Frege según el cual los *Wertverläufe* de funciones que dan los mismos valores para los mismos argumentos son idénticos (y recuérdese que también es válido para Frege el condicional inverso). Los M son *Wertverläufe*, de acuerdo con la definición ofrecida, y se les podrán aplicar, por consiguiente, tales condiciones de identidad.

Supongamos que se cumplen para x e y las hipótesis del axioma I', es decir: Mx, My, (z) (z ε x ↔z ε y). Quedará demostrado I' en nuestra interpretación, si aplicando las definiciones llegamos de estas hipótesis a la conclusión de que x = y.

De acuerdo con la tercera de nuestras hipótesis, las mismas entidades pertenecen a x e y. Pero, ¿qué entidades pertenecen a x? Según la definición de 'ε', aquellas entidades z tales que arrojan el resultado V cuando se les aplica una función cualquiera de la que x es *Wertverlauf*. Pero por las condiciones de identidad de *Wertverläufe*, todas las funciones de las que x es *Wertverlauf* se comportan de la misma manera en cuanto a los valores que dan a argumentos dados. Tomemos, pues, una función *f* de la cual x es *Wertverlauf*. Por lo dicho, las entidades que pertenecen a x son aquellas entidades z tales que *f* z = V. Por razones totalmente paralelas, si tomamos una función *g* de la cual y es *Wertverlauf*, las entidades que pertenecen a y serán aquellas entidades z tales que *g* z = V. Por hipótesis, las entidades que pertenecen a x son las mismas que las que pertenecen a y. Aplicando entonces esta hipótesis a las conclusiones formuladas en la penúltima y antepenúltima oraciones, inferimos que *f* y *g* dan el valor V para las mismas entidades. Pero por la definición de 'M' (y la observación anterior de que todas las funciones de que una entidad es *Wertverlauf* se comportan igual respecto de asignación de valores a argumentos dados), *f* y *g* sólo asignan dos valores a sus argumentos: V y la falsedad. Ya vimos que asignan V a las mismas cosas. Pero entonces a todas las cosas restantes a que pueden aplicarse les asignarán la falsedad. Luego, dan los mismos valores para los mismos argumentos. Luego x e y son los *Wertverläufe* de funciones que arrojan los mismos valores para los mismos argumentos. Luego, x = y, lo cual demuestra la verdad de I' en la interpretación elegida.

Es más intuitivo el cumplimiento del segundo axioma. Según (II'), dada una

condición Bx, habrá un M, llamémoslo y, tal que x ε y si y sólo si Bx. Veamos si se desprende la verdad de esta afirmación de la interpretación dada y las teorías de Frege.

Tomemos una condición Bx. Para Frege, constituirá un predicado monádico. A ese predicado monádico le corresponderá un concepto C, tal que Cx = V si y sólo si Bx. Pero C tendrá un *Wertverlauf*. Sea y tal *Wertvelauf*. De acuerdo con nuestra definición, y es un M. Demostraremos (II') si logramos establecer que

$x \varepsilon y \leftrightarrow Bx$

Según nuestra definición de 'ε', x ε y si y sólo si y es M (ya establecido) y cualquier función de la que y sea *Wertverlauf* da V aplicada a x. Pero ya vimos que todas las funciones de las que y es *Wertverlauf* se comportan igual respecto de la asignación de valores.

Luego, x ε y si y sólo si Cx = V. Antes establecimos que Cx = V si y sólo si Bx. Por transitividad del 'si y sólo si', queda establecido que x ε y si y sólo si Fx, lo cual demuestra (II').

4. Conclusión

Las secciones anteriores muestran cuál es la relación que conecta la lógica de Frege con la teoría de conjuntos: en primer lugar, hay en la teoría de Frege entidades que pueden representar conjuntos; en segundo lugar, esas entidades cumplen los axiomas de la teoría de conjuntos conocida con el nombre de 'cálculo ideal'. Como esta teoría es inconsistente, tenemos una nueva explicación de la inconsistencia del sistema fregeano: hace supuestos estructuralmente idénticos a los que provocaron la inconsistencia de la teoría clásica de conjuntos.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSOFICAS
UNAM

Referencias

Avila del Palacio, Alfonso, "Sobre la noción fregeana 'extensión de un concepto'", este número de *Análisis Filosófico, red. 19-35*.

Fraenkel, Bar Hillel, Levy, *Foundations of Set Theory*, 2a. ed., Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1973.

Frege, Gottlob, "Comments on Sense and Meaning", en Frege, *Posthumous Writings*, pp. 118-125.

"Function and Concept", en Frege, *Translations from the Philosophical Writings... Posthumous Writings*, Oxford, Basil Blackwell, 1979.

The Basic Laws of Arithmetic, University of California Press, 1964.
Translations of the Philosophical Writings of Gottlob Frege, Oxford, Basil Blackwell, 1970.
Orayen, Raúl, *La ontología de Frege*, Universidad Nacional de La Plata, 1970.
Quine, Williard Van Orman, "Unification of Universes in Set Theory", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 21, pp. 267-79.
Rosado Haddock, Guillermo E., *Exposición crítica de la filosofía de Frege*, República Dominicana, 1985.
Valdivia, Lourdes, "Lo indecible en Frege", *Análisis Filosófico*, Buenos Aires, Vol. IV Nº 1, pp. 1-17

ABSTRACT

This paper tries to make clear and precise the relationship between Frege's theory of extensions and set theory. First, it is shown that, even though Frege's notion of the extension of a concept is ontologically different from the notion of set, Frege's extensions can "represent" sets for two reasons: (i) they are similar to characteristic functions of sets, and (ii) there are enough fregean extensions to build a one-to-one correspondence between intuitive sets and those extensions (which is what makes it possible to represent each set by just one extension). Secondly, it is shown that Frege's extensions constitute a model of the inconsistent set theory called "The ideal calculus".