SOBRE LA NOCION FREGEANA "EXTENSION DE UN CONCEPTO" [1]

ALFONSO AVILA DEL PALACIO

En este artículo intentaré aclarar lo que Frege entiende por 'extensión de un concepto', para lo cual defenderé una interpretación particular de los términos fregeanos 'concepto' y 'extensión', así como de los estrechamente vinculados de 'función' y 'curso de valores'. Frege dio ciertas definiciones intuitivas de 'concepto' y 'extensión' recurriendo a las nociones de función y de curso de valores;[2] pero, con el propósito de esclarecer todos esos términos, no me apoyaré únicamente en esas "definiciones", sino que las tomaré, al igual que otras afirmaciones de Frege sobre esas expresiones, sólo como "indicaciones que nos hacen entender las palabras como se pretende" ("Sobre concepto y objeto" en Frege 2, p. 238). El significado que Frege le atribuyó a esos términos no fue estrictamente el mismo a través de toda su obra; pero, para los efectos del presente trabajo, me interesa aclarar únicamente el uso que tienen en las dos grandes obras con las que concluye su análisis acerca de los juicios matemáticos: *Los fundamentos de la aritmética* y *Las leyes básicas*.

---

1 Este trabajo es el fruto de mis intuiciones e indagaciones sobre el marco conceptual fregeano y, sobre todo, de las estimulantes y sugerentes conversaciones sobre el tema con León Olivé, Raúl Orayen, Asunción Preisser y Lourdes Valdivia. Agradezco también a Raúl Orayen su ayuda en la revisión final del texto. Las citas bibliográficas, para facilitar su consulta, se refieren en su mayoría a las versiones españolas de los textos fregeanos, aunque en realidad las traducciones que presento aquí son el resultado de cotejar las diversas ediciones que menciono en la bibliografía. Uso el doble entrecomillado, además de su función común, para expresar y resaltar el referente único de una expresión compleja de naturaleza funcional; y uso el entrecomillado sencillo, como Frege, para referirme a la expresión misma que queda entrecomillada.

2 Sin embargo, esto acarrea complicaciones en el sistema fregeano ya que, al parecer, Frege definió, por ejemplo, 'concepto' al decir: "llamé concepto a una función cuyos valores son siempre valores de verdad, y ésta –dice– podría ser tomada como una definición" (Frege, 9, p. 89); pero, por otro lado, Frege especificó que las definiciones se expresan mediante igualdades, y "a un lado del signo de igualdad no puede estar nunca la designación de un concepto,... sino que siempre habrá que designar o aludir a un objeto" ("Consideraciones sobre sentido y referencia" en Frege, 6, p. 90), de tal suerte que tomando esto en cuenta, no podríamos definir el término 'concepto' si por él queremos aludir al concepto fregeano.

1. La expresión 'Begriff'

Ahora bien, ¿qué entiende Frege por "*Begriff*" o 'concepto'?. Antes de *Los fundamentos de la aritmética* había sostenido que "al dar el mismo símbolo a cosas diferentes aunque similares, propiamente ya no designamos la cosa individual sino lo que tienen en común: el concepto" ("Sobre la justificación científica de una conceptografía" en Frege 2, p. 210). Según esta idea, el concepto es algo que puede ser común a varias cosas individuales. Y aquello que comparten varias cosas individuales puede ser una propiedad como el seer rojo o frío, también puede ser una relación que los vincule, o tal vez, incluso, algún objeto o circunstancia comunes. Así pues, esta caracterización de concepto es todavía muy vaga; y en su obra posterior Frege precisa su idea, y da algunos criterios para distinguir los conceptos de los objetos, y de las relaciones.

Con respecto a los objetos dice: "el concepto, como yo entiendo la palabra es predicativo (es la referencia de un predicado gramatical)... Decimos que algo cae bajo un concepto en 'esta hoja es verde';... Yo mismo he señalado –también– que un concepto puede caer bajo uno superior ...–Sin embargo, con eso no se borra la diferencia entre concepto y objeto;–...ya que un nombre de objeto, un nombre propio, es totalmente incapaz de ser utilizado como predicado gramatical" ("Sobre concepto y objeto" en Frege 2, p. 238). De esa forma, Frege adopta un punto de vista lingüístico mediante el cual distingue, en la ontología, los conceptos de los objetos. Los nombres propios, como 'Julio César' o las expresiones que comienzan con un artículo determinado singular como 'el concepto *caballo*', designan un objeto singular y son incapaces de ponerse en plural. En efecto, no podemos decir con sentido 'los Julio César' o 'los conceptos *caballo*'. Los nombres propios no pueden atribuirse a varios individuos, ya que son una forma de señalar un objeto singular; mientras que, por otra parte, los predicados gramaticales como 'es *caballo*', que se distinguen porque pueden ponerse en plural diciendo 'son *caballos*', e igualmente pueden usarse con los artículos indeterminados diciendo 'es un *caballo*', no designan un objeto singular, sino un concepto. En ese sentido, un concepto en tanto que es predicaivo, es algo diferente de cualquier objeto singular. Así pues, con respecto a este punto, hay en la ontología fregeana objetos, por un lado, y lo que se precica de los objetos por el otro. Sin embargo, esto no está exento de dificultad ya que, por una parte, el concepto *caballo* es un objeto singular; y, por otra, los conceptos en general y por supuesto el de caballo en particular, en tnato que son la referencia de un predicado gramatical, no son de ninguna forma objetos singulares.

Esta dificultad ha llevado a L. Valdivia a sostener que dentro del sistema fregeano "no podemos nombrar los conceptos para hacer afirmaciones sobre ellos, y no podemos formular criterios de identidad para funciones en general"

(Valdivia, 1, p. 14, Valdivia, 2, p. 308). Ahora bien, una solución a eso, sugerida por el propio Frege, es que cuando queremos predicar de un concepto "el concepto no puede por su naturaleza predictiva, aparecer sin más así, sino que primero tiene que ser transformado en un objeto, o dicho más exactamente, debe ser representado por un objeto que designamos mediante las palabras antepuestas 'el concepto'" ("Concepto y objeto" en Frege 6, p. 106). Así pues, al parecer, la ontología fregeana contiene categorías mutuamente excluyentes como las de objetos y conceptos; y, sin embargo, dichas categorías, así como tienen diferencias, también tienen ciertos vínculos entre sí. Un concepto, en tanto que es predicativo, no puede ser un objeto; pero, un objeto puede representar al concepto. Sin embargo, cuando nos referimos al objeto que representa un concepto, en realidad nos queremos referir al concepto mismo; de tal suerte que el concepto se nos escapa. Y si al predicar de un concepto no predicamos de éste ¿entonces de qué predicamos? Así pues, todo esto sugiere que Frege ha quedado atrapado en sus propias redes, y que, como dice L. Valdivia: dentro del sistema fregeano, no puede decirse nada sobre los conceptos.

No obstante, Frege afirmó que "en investigaciones lógicas, no pocas veces es necesario enunciar algo sobre un concepto" ("Concepto y objeto" en Frege 6, p. 106); e incluso cosas muy importantes para el programa fregeano: "he dicho en los *Fundamentos* que la asignación de un número dice algo acerca de un concepto; hablo de propiedades que pueden decirse de un concepto, y admito que un concepto caiga bajo uno superior" ("Concepto y objeto" en Frege 6, p. 109). Aunque, para marcar tanto la diferencia como la semejanza dice más adelante: "un objeto cae *bajo* un concepto de primer orden, y un concepto cae *en* un concepto de segundo orden. La diferencia entre concepto y objeto –recalca– sigue siendo, pues, completamente tajante" (p. 118). No obstante, Frege mismo vio con bastante claridad la dificultad en la que se encontraba al decir estas cosas. "La naturaleza predicativa del concepto –dice– es un gran obstáculo para la expresión adecuada y para la comprensión. Cuando quiero hablar de un concepto, el lenguaje me fuerza con violencia casi insoslayable a una expresión inadecuada, con lo cual el pensamiento queda obscurecido, casi diría falseado" ("Consideraciones sobre sentido y referencia" en Frege 6, p. 88). Y, en otro lado, afirma: "por una cierta necesidad lingüística, mi expresión, tomada literalmente, no corresponde a veces al pensamiento, al nombrar un objeto cuando se quiere significar un concepto. Me hago plenamente consciente de apelar en estos casos a la comprensión bienintencionada del lector" ("Concepto y objeto" en Frege 6, p. 117).

Así pues, si por un lado, los conceptos y los objetos son categorías mutuamente excluyentes; y, por otro, Frege se permite hablar de los conceptos mediante objetos representativos, y debe apelar a la comprensión bienintencionada del

lector, eso hace pensar que el sistema fregeano necesita alguna enmienda. Creo que puede corregirse proponiendo la existencia de ciertas "entidades conceptuales" como *caballo*; que no serían ni conceptos ni objetos, sino algo lógicamente más simple; es decir, aquello que comparten los referenes de las expresiones 'es *caballo*' y 'el concepto *caballo*'. Y, estas "entidades conceptuales" serían de tal mdo que si se les añadiera cierta naturaleza predicativa obtendríamos un concepto, y cuando se les añadiera cierta naturaleza objetiva obtendríamos un objeto de segundo orden. Y, por otro lado, habría también algo así como "entidades objetivas", que serían los objetos de primer orden. De hecho, Frege mismo deja abierta una posibilidad así al afirmar que "lo lógicamente simple, al igual que la mayoría de los elementos químicos, no está dado de antemano, sino que sólo se alcanza después de una labor científica. Si se descubre algo que es simple, o que al menos hasta el momento debe ser considerado como simple, habrá que acuñar para ello una denominación" ("Concepto y objeto" en Frege 6, p. 100). Así pues, considero que proponer estas entidades no violenta aspectos básicos del sistema fregeano y, en cambio, lo hace más inteligible. De acuerdo con eso, cuando predicamos de un concepto tendríamos que aclarar que en realidad predicamos de la "entidad conceptual" que comparte con el objeto que lo representa; y, al parecer, eso es suficiente. El concepto, en tanto que es predicativo, se nos escapa; pero, como tiene que ver más bien con lo intensional, eso no interesa para la lógica ("Consideraciones sobre sentido y referencia" en Frege 6, p. 94). Y lo mismo valdría, *mutatis mutandis*, para las funciones en general; lo único sobre lo que no podríamos hablar acerca de ellas, es sobre su naturaleza no saturada, para la cual tampoco tendríamos criterios de identidad por tener un carácter intensional. De tal suerte que, si aceptamos las entidades mencionadas, lo que digamos en adelante sobre los conceptos y las funciones deberá entenderse que se refiere a las "entidades conceptuales" o a las "entidades funcionales" respectivamente, ya que sobre sus naturalezas predicativa y no saturada no podemos decir sino que son de carácter intensional.

Y para aclarar las diferencia entre conceptos y relaciones, Frege utiliza la noción de funciones proposicionales o funciones que sólo tienen valores de verdad. Para él tanto los conceptos como las relaciones son funciones de ese tipo. Pero, mientras los conceptos son funciones de un argumento, las relaciones son funciones de dos o más argumentos. Ahora bien, para entender bien esto es necesario primero que aclaremos en qué sentido usa Frege la expresión '*Funktion*' o 'función'.

2. La expresión 'Funktion'

Frege había aclarado lo que él entendía por 'función' desde *La conceptografía* en los siguientes términos:

> Si pensamos la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico, *entonces* en el lugar del símbolo del hidrógeno podemos poner el símbolo del oxígeno o del nitrógeno. Al hacer esto, se cambia el sentido de manera que oxígeno o nitrógeno aparecen en la vinculación en la que *antes* estaba hidrógeno. Al pensar de esta manera la expresión como variable, se descompone la misma en un componente estable, que representa la totalidad de las vinculaciones, y el símbolo, considerado como reemplazable por otros, que significa el objeto que se encuentra en estas vinculaciones. Al primer componente lo llamo función, y al último su argumento (inciso 9).

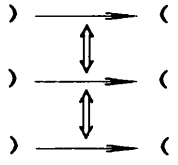
Y, posteriormente en "Función y concepto" dice:

> Reconocemos la función en una expresión en virtud de que la pensamos separada; y se insinúa por su estructura una posible separación de este tipo. Las dos partes en que se separa la expresión, el símbolo del argumento y la expresión de la función, no son de la misma especie; pues el argumento es un todo cerrado en sí, mientras que la función no lo es... Y llamamos valor de la función para un argumento, a lo que resulta de completar la función con ese argumento. De esa manera, por ejemplo, 3 es el valor de la función "$2x^2 + x$" para el argumento 1, ya que tenemos $2(1)^2 + (1) = 3$. (Frege 2, p. 219)

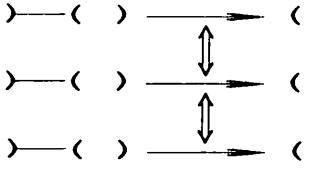
De acuerdo con eso, una función es el referente de una expresión con huecos; ese referente es en sí mismo incompleto pero al completarse con objetos que actúan como argumentos produce otros objetos llamados valores. Así pues, podemos decir que una función es una especie de esqueleto que permite vincular objetos; es decir, según la interpretación que me parece más adecuada, es una forma o un modo como pueden vincularse objetos. A partir de una función, ciertos argumentos se vinculan con determinados valores; pero, en general, sería fácil mostrar que una misma vinculación podría lograrse de diferentes modos. Por ejemplo, la vinculación del 1 con el 2, del 2 con el 4, del 3 con el 6, *etc.*, se puede obtener a partir de diferentes funciones tales como "$2x$", "$4x/2$", "$2x^2/x$", etc.. Es decir, que para vincular esas parejas de números, puedo obtener el segundo número multiplicando el primero por 2, o multiplicándolo por 4 y dividiendo el resultado entre 2, etc. Según esto, una función es sólo un modo, entre otros posibles, a partir del cual puede obtenerse una cierta vinculación entre objetos. Sin embargo, Frege no da criterios de identidad para estos modos debido a que los considera

unidos a un cierto carácter intensional. Dado que mi idea de ver las funciones como modos de vincular objetos me parece central para entender la terminología fregeana, me permitiré ilustrar mi interpretación mediante una serie de dibujos.

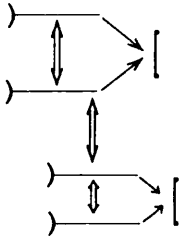
Una función podría estar representada por el siguiente diagrama:



en donde los huecos de la izquierda pueden ser llenados sólo por objetos tomados como argumentos; los huecos de la derecha se llenan con un objeto tomado como valor, una vez que el hueco de la izquierda de esa misma flecha se ha llenado con un argumento; las flechas horizontales, representan la vinculación de cada argumento con el valor correspondiente de la función; y las flechas verticales, representan la unidad de la función. Y si el anterior diagrama representa una función de un argumento, el siguiente puede representar una función de dos argumentos:



donde los dos huecos de la izquierda tienen que ser llenados con argumentos para que se obtenga el valor de la función. Y, si se trata de una función proposicional, que sólo arroja valores de verdad, se podría representar de la siguiente manera para diferenciarla de las funciones no proposicionales que quedarían representadas por los diagramas anteriores:



donde las líneas más cortas producen lo verdadero para los argumentos corres-

pondientes, y las líneas más largas producen lo falso; tratando de expresar que los argumentos que producen lo verddero tienen una vinculación más estrecha con la función, en tanto que son los objetos que caen bajo la función –concepto. Creo que lo dicho bastará para aclarar de qué forma pueden usarse los diagramas para expresar las diferentes clases de funciones. Las de segundo orden, por ejemplo, podrían tener entradas diferentes a la izquierda, para indicar que sus argumentos no son objetos de primer orden, sino funciones objetivadas. Para representar diferentes funciones que permitan vincular los mismos objetos en el mismo orden, se podrían usar diagramas que tuvieran la misma estructura, pero que difiriesen por el hecho de contener flechas de trazado diverso (continuo, corrugado, punteado, etc.). Las diferentes formas en las cuales se pueden vincular los mismos objetos tienen un cierto carácter intensional, y las diferencias entre unas y otras pueden ser muy sutiles.

Así pues, según la interpretación de los textos fregeanos que he ilustrado con los diagramas, una función es una forma como pueden vincularse objetos cualesquiera. En esos términos, una función es una especie de esqueleto al que le faltan las cosas que puede vincular. Y, así como pueden darse diferentes esqueletos que permiten vincular los mimos objetos, igualmente, para Frege, existen diferentes funciones, como "2x" y "4x/2" a las que nos hemos referido más arriba, que permiten vincular los mismos objetos. Frege usa el término 'función', no como los matemáticos para referirse a la vinculación misma entre objetos, que puede representarse a veces mediante una curva; sino para referirse a una idea, según él, más primitiva: lo usa, para referirse a un esqueleto, entre otros posibles, a partir del cual podemos construir una vinculación entre objetos cualesquiera. Además, en Frege el significado de ese término no es meramente matemático, ya que encontró que gran parte de las expresiones del lenguaje ordinario tienen una estructura similar a las expresiones que se usan en matemáticas para hablar de vinculación entre objetos matemáticos. Así pues, a las formas de vincular objetos cualesquiera, Frege las denomina 'funciones'; a los objetos que pueden actuar como candidatos para estar en la vinculación que describe la función, Frege los llama 'argumentos'; y a lo que resulta de combinar una función con algún argumento, lo llama 'valor de la función'. Los conceptos son funciones de un argumento que arrojan lo verdadero cuando toman como argumentos los objetos que caen bajo el concepto, y arrojan lo falso cuando toman como argumentos objetos que no caen bajo el concepto. Así pues, por ejemplo, "*x* es hombre" es una función concepto en tanto que es una manera de vincular Juan con la verdad, Felipe con la verdad, la luna con lo falso, etc.; en tanto que la verdad es lo que resulta de completar la función "*x* es hombre" con los argumentos Juan y Felipe, y lo falso es lo que resulta de completarla con argumentos como la luna.

Ahora bien, si eso es un concepto ¿qué debe entenderse por 'extensión de un concepto'? Frege sostiene que "podemos designar como extensión de un concepto al curso de valores de una función de un argumento cuyo valor para cada argumento es un valor de verdad" ("Función y concepto" en Frege 2, p. 225). Lo cual nos obliga a clarificar primero lo que Frege entiende por la expresión 'curso de valores'.

3. La expresión 'Wertverlauf'

Acerca de los Wertverläufe o cursos de valores Frege afirma lo siguiente:

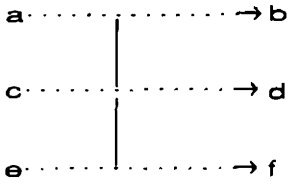
> El método de la Geometría Analítica ofrece un medio para hacer intuitivos los valores de una función para diferentes argumentos. A saber, considerando el argumento como valor numérico de la abscisa y al correspondiente valor de la función como valor numérico de la ordenada de un punto, obtenemos un complejo de puntos que se muestran a la intuición como una curva en los casos habituales. Cada punto de la curva corresponde a un argumento con el valor correspondiente de la función... Por ejemplo, la función "$x^2 - 4x$" produce una parábola; y dado que la funcieon "$x(x - 4)$" produce la misma parábola, decimos que ambas funciones tienen el mismo curso de valores ("Función y concepto" en Frege 2, pp. 219 y 220).

Frege no define lo que es un curso de valores, pero da sus condiciones de identidad en su famosa ley V de *Las leyes básicas*. En su simbología la ley es como sigue: "$\vdash [\dot{\varepsilon} f(\varepsilon) = \dot{\alpha} g(\alpha)] = (x)[f(x) = g(x)]$" (Frege, 7, p. 72, inciso 20). Donde las letras griegas aspiradas que anteceden a la expresión funcional correspondiente convierten la expresión de la función en una expresión del curso de valores de dicha función. Así pues, la ley afirma que decir que dos cursos de valores son iguales, es lo mismo que decir que las funciones correspondientes arrojan los mismos valores para los mismos argumentos.

De acuerdo con eso, y teniendo en cuenta la interpretación que hemos dado para las funciones, el curso de valores sería la vinculación misma entre objetos. Las funciones son diferentes modos de vincular objetos, mientras que los cursos de valores serían las vinculaciones mismas tomadas como objetos fregeanos, es decir como referentes de expresiones saturadas. En palabras de Sluga "la función ella misma, no es una entidad; su naturaleza es correlacionar argumentos con valores. Pero a través de la función se establece una correlación, y esa correlación puede ser considerada una entidad con sus propios criterios de identidad. Esa entidad se llama curso de valores" (Sluga 1, p. 145). Ahora bien, así como representamos las funciones mediante diagramas, los cursos de valores podrían expresarse de la siguiente manera:[3]

---

3 Esta representación de los cursos de valores surgió inspirándome en algunas ideas de Asunción Preisser y Raúl Orayen sobre este tema.



donde las letras representan objetos; las flechas entrecortadas representan la conexión entre parejas de objetos si se trata de una función de un argumento; y las líneas verticales representan la unidad entre todas las parejas de objetos que pueden aparearse mediante las funciones cuyos cursos de valores coincidan y estén expresados por el diagrama anterior. En este diagrama he usado flechas y líneas verticales entrecortadas para expresar la vinculación misma entre objetos, independientemente de las diferentes formas mediante las cuales se puede lograr la vinculación.

Según eso, el curso de valores de una función proposicional sería la vinculación entre objetos cualesquiera y los valores de verdad; es decir, entre objetos y el caer o no bajo la función proposicional. O, metafóricamente, el curso de valores de una función proposicional sería la vinculación entre algunos objetos y el sí, y otros objetos y el no. Lo cual significa para las funciones proposicionales de un argumento que no sólo se están vinculando parejas de objetos, sino que se está agrupando, por un lado, los objetos *que caen bajo* ciertoconcepto y, por otro lado, los objetos *que no caen bajo* ese concepto.

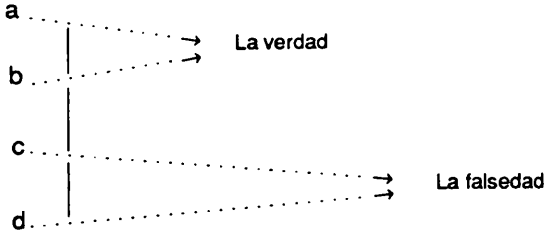
4. La expresión 'Umfang'

Y para aclarar más lo que significa el curso de valores de una función proposicional de un argumento, Frege se refirió a las extensiones *(Umfänge)* de conceptos también en los siguientes términos:

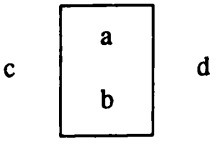
> ...en "*o* sub *a*" debemos reconocer *o* y *a* como extensiones de conceptos... De acuerdo con eso *o* tiene que ser visto como una clase de objetos que tienen una cierta propiedad... Pero la extensión de un concepto está constituida esencialmente, no por los individuos, sino por el concepto mismo... Si *o* es la clase de objetos que son *b* y *a* es la clase de objetos que son *c*, '*o* sub *a*' significa: todos los *b* son *c*... Ahora bien, si hay una cosa singular *v* que es un *b*, "*v* subter *o*" implica "*v* subter *a*" ...Por consiguiente, se debe separar 1) la relación de un objeto (un individuo) con la extensión de un concepto cuando él cae bajo el concepto (la relación subter); y 2) la relación entre la extensión de un concepto y la de otro cuando el primer concepto está subordinado al segundo (la relación sub) (Frege 6, pp. 101 y 102).

Así pues, basándonos en esta cita, y por lo señalado más arriba, podemos decir

que la extensión de un concepto *es un conjunto* de objetos que queda *definido a partir de una cierta manera de vincular* objetos singulares con valores de verdad, de tal forma que los objetos del conjunto son aquellos que, según esa manera de vinculación, están asociados con la verdad, y los que quedan fuera de él, son los que esa manera de vinculación asocia en la falsedad. Más aún, según esta última cita, las extensiones de conceptos se comportan con respecto a las relaciones de *subter* y *sub*, en términos generales, tal como los conjuntos cantorianos se comportan con respecto a las relaciones de ϵ y $\subseteq$ respectivamente. Sin embargo, no hay que olvidar que para Frege sus "conjuntos" son siempre extensiones de conceptos; no están constituidos por objetos como un bosque está constituido por árboles, sino que están definidos a patir del concepto. Ahora bien, para ilustrar en mis términos la idea de que las extensiones de los conceptos fregeanos pueden cumplir, en términos generales, las mismas funciones que los conjuntos cantorianos, me auxiliaré del diagrama que presenté para las funciones proposicionales de un argumento. Según ese diagrama, todos los objetos que caen bajo el concepto están unidos con la verdad, y de esa forma quedan agrupados. De tal suerte que el curso de valores de una función proposicional de un argumento es un conjunto fregeano, en tanto que agrupa a los objetos que caen bajo el concepto. Esto lo podríamos ilustrar con el siguiente diagrama:



que sería análogo a la representación ordinaria de conjuntos:



donde se encierran los objetos del conjunto, separándolos así de todos los demás.

En conclusión, la extensión de un concepto es una suerte de vinculación que agrupa los objetos que caen bajo el concepto y los separa de los objetos que no caen bajo el concepto. Esta interpretación que propongo, me parece no sólo la

más cercana a las ideas del propio Frege sino también esclarecedora de su pensamiento desde que permite conciliar varias de sus tesis concernientes a estas nociones. Por ejemplo, permite entender 1) que las diferentes funciones que comparten un mismo curso de valores sean diferentes formas de obtener una misma vinculación entre argumentos y valores; 2) que los conjuntos asociados a las funciones proposicionales de un argumento, es decir las extensiones de los conceptos, se identifiquen con sus cursos de valores; y 3) que los cursos de valores, y las extensiones por consiguiente, sean objetos.

La idea de ver los cursos de valores de las funciones de un argumento como vinculaciones entre parejas de objetos, es cercana a la tesis, que ha sido expuesta por varios autores, según la cual el curso de valores de esas funciones es un conjunto de pares ordenados. A continuación analizaré en qué sentido dicha tesis coincide con la mía, en qué sentido ha sido generalmente mal formulada y, también, cómo podría reformularse para salvar algunas de las dificultades con las que se ha enfrentado.

5. La tesis de los pares ordenados

Varios intérpretes de Frege se han inclinado por la tesis que identifica los cursos de valores con conjuntos de pares ordenados. Montgomery Furth, por ejemplo, la enuncia en los siguientes términos:

> la noción de curso de valores se expresa fácil y cómodamente por las nociones más recientes, como aproximadamente una función en extensión. Así, expresiones de la forma '$\breve{\varepsilon}(\ldots\varepsilon\ldots)$' encontradas en Frege pueden ser leídas como significando lo mismo que expresiones de la forma '$\breve{\gamma\chi}(y = \ldots x\ldots)$', es decir, como denotando la clase de pares ordenados (y,y), tales que y es el valor de la función $\ldots\varepsilon\ldots$ para el argumento x. Y así, el nombre '$\breve{\varepsilon}(\varepsilon + 7)$' denotaría una clase conteniendo pares ordenados tales como (0,7), (1,8), (2,9), etc. (Frege 7, p. xxxvii)

De forma similar, B. V. Birjukov dice:

> El curso de valores de una función dada es lo que usualmente se llama la gráfica de la función, es decir, un cierto conjunto de paes ordenados (Birjukov 1, p. 19).

Rulon S. Wells, por su parte, afirma:

> La moderna concepción de la relación diádica tomada extensionalmente, como una clase de pares ordenados, nos permite pensar la curva definida por la función "x^2" como una relación diádica... [Y así,] todos los cursos de valores de funciones pueden ser clases de pares, tríos o n-adas, es decir, relaciones tomadas en extensión [Pero como] el curso de valores de la función "$x^2 = 4$" consiste en un infinito

> número de pares ordenados;... y la clase en el moderno sentido (russelliano) determinado por la función "$x^2 = 4$" ...contiene, no un infinito número de elementos, sino únicamente dos: 2 y –2; ninguno de los cuales es un par ordenado; [en conclusión] el curso de valores de la función "x2 = 4" es muy diferente a la clase determinada por ella; [y por lo cual] la identificación que hace Frege de clases y extensiones necesita no ser tomada literalmente (Klemke, 1, pp. 15 y 16).

Y, para no prolongar demasiado la lista, citamos por último a Rosado Haddock en su reciente libro sobre Frege en el que se pregunta lo siguiente:

> ¿En qué consiste el curso de valores de funciones de un argumento cuyo valor es siempre un valor veritativo?... [Y él mismo responde:] dicho curso de valores es el conjunto de pares ordenados (*a*,*b*), donde *a* es un objeto cualquiera y *b* es uno de los valores veritativos... [Pero,] la extensión de un concepto es una suerte de conjunto determinado por dicho concepto, al cual pertenecen todos y sólo aquellos objetos que caen bajo dicho concepto... [Así pues] si comparamos el curso de valores de un concepto con la extensión del concepto, encontramos que... el curso de valores es un conjunto de pares ordenados, mientras que la extensión del concepto no es ningún conjunto de pares... [Y por lo tanto] la extensión de un concepto [a pesar de ciertas afirmaciones expresas de Frege] no es ningún caso especial del curso de valores de una función (Rosado Haddock 1, pp. 119 y 120).

Sin embargo, defender la tesis de los pares ordenados en los términos citados, acarrea ciertas complicaciones en el sistema fregeano. En primer lugar, no es lo mismo decir que el curso de valores *es* un conjunto de pares ordenados, a decir que el curso de valores *puede ser expresado* mediante un conjunto de pares ordenados. Considero que entender la tesis en el primer sentido, la hace entrar en conflicto con ciertas afirmaciones del propio Frege. Por ejemplo, cuando dice que "la extensión de un concepto está constituida esencialmente, no por los individuos, sino por el concepto mismo" (Frege, 6, p. 101), nos hace pensar que la extensión, que es un curso de valores, no está constituida por individuos, sean éstos pares ordenados u otra cosa, sino que es algo más abstracto. En consecuencia, la tesis me parece más defendible si la entendemos diciendo que el conjunto de pares ordenados es sólo, como dice Dummett, "un esqueleto que sirve para una adecuada representación" (Dummett 2, p. 172).

En segundo lugar, para darle una interpretación precisa a la tesis de los pares ordenados hay que revisar en qué sentido se está usando la palabra 'conjunto': 1) en sentido clásico; 2) en sentido fregeano; o 3) en otro sentido. A continuación, y atendiendo a los citados sentidos de 'conjunto', desarrollaré por mi cuenta la versión dumettiana de la tesis; versión que, por cierto, convierte el conjunto de pares ordenados en solamente un código alternativo al que he sugerido antes mediante diagramas.

1) En sentido clásico, que Frege atribuye a Dedekind y Schröder (Frege 7, inciso 0), un conjunto se identifica con los elementos que lo forman, de igual manera que un bosque se identifica con los árboles que lo constituyen. De tal suerte que afirmar que el curso de valores es un conjunto de pares ordenados equivale a decir que es igual a los pares ordenados. Y ese parece ser, por cierto, el sentido que le da Wells al término 'conjunto' al sostener que "el curso de valores de "$x^2 = 4$" consiste en un infinito número de pares ordenados"; e inmediatamente después, rechazar que el curso de valores se identifique con el conjunto determinado por esa función; ya que dicho conjunto "contiene, no un infinito número de elementos, sino únicamente dos: 2 y -2.". De tal suerte que, al parecer, 'consiste en' es equivalente para Wells a 'contiene'.

Ahora bien, si ése es el sentido del término 'conjunto', la tesis de los pares ordenados estaría diciendo lo siguiente:

a.- Para las funciones no proposicionales, si adoptamos la versión de Dummett, decir que su curso de valores puede ser expresado mediante ciertos pares ordenados, implica que el curso de valores es aquello que expresan los pares ordenados al igual que las gráficas de las funciones matemáticas: es decir, una cierta vinculación o conexión entre argumentos y valores. Siendo así, decir, por ejemplo, que el curso de valores de la función "2x" se expresa mediante el conjunto de los pares ordenados (1, 2), (2, 4), (3, 6), etc., sería análogo a decir que es lo que expresa la recta que, en el eje cartesiano, pasa por los puntos (1, 2), (2, 4), etc.; es decir, la vinculación que aparea el 1 con el 2, el 2 con el 4, etc. En ese sentido, la tesis de los pares ordenados estaría diciendo, en otro código, lo mismo que intenté expresar con los diagramas que presenté arriba.

b.- Para las funciones proposicionales, decir, por ejemplo, que el curso de valores de "$x^2 = 4$" se expresa mediante los pares ordenados (-2, lo verdadero), (-1, lo falso), (0, lo falso), (1, lo falso), (2, lo verdadero), etc., y que su conjunto asociado es el referente de 'el conjunto de 2 y -2'; entonces podemos decir que ambas expresiones se pueden ver como dos maneras de decir que solamente el 2 y el -2 satisfacen la función, *ie*: caen bajo el concepto. De hecho, los pares ordenados son una forma de expresar la vinculación o conexión que se da entre ciertos objetos y los valores de verdad, es decir, entre esos objetos y el caer o no bajo el concepto. Y al hacer eso, podemos decir que están delimitando un conjunto al especificar exhaustivamente lo que entra y lo que no; es decir, lo que satisface la función proposicional y lo que no. Al igual que, por otro lado, 'el conjunto de únicamente 2 y -2' es una forma de expresar la vinculación o conexión entre esos objetos y el sí, y todos los que quedan fuera y el no. En este sentido, la tesis de los pares ordenados estaría expresando, en un código diferente, lo mismo que intenté expresar con los diagramas que presenté arriba.

2) Si el término 'conjunto' lo entendemos en sentido fregeano, Raúl Orayen

(1, vol. 4, pp. 5 y 6) ha mostrado que no puede identificarse el curso de valores con un conjunto de pares ordenados. Así pues, en este punto seguiremos la prueba de Orayen, añadiéndole sólo algunos elementos que, a nuestro parecer, la hacen más clara y contundente.

a.- Para las funciones no proposicionales, si decimos que su curso de valores es un conjunto de pares ordenados se incurre en una contradicción. Los conjuntos, según Frege, son extensiones de conceptos; es decir, cursos de valores de funciones proposicionales monádicas. De tal suerte que el curso de valores de una función no proposicional como "x^2", al ser un conjunto de pares ordenados, sería al mismo tiempo, por ser un conjunto fregeano, el curso de valores de una función proposicional. Y según la ley V que citamos, si dos funciones tienen el mismo curso de valores, darán el mismo valor para el mismo argumento; y por consiguiente "x^2" tendrá que dar valores de verdad como la función proposicional con la que comparte el curso de valores. Lo cual es contrario a la suposición inicial de que era una función no proposicional. De ahí se desprende que de ninguna función no proposicional se puede decir que su curso de valores es un conjunto (en sentido fregeano) de pares ordenados, o de lo que sea.

b.- Para las funciones proposicionales, si decimos que su curso de valores es un conjunto de pares ordenados, también se incurre en una contradicción. Si, por ejemplo, decimos que el curso de valores de la función proposicional "*x* es hombre", bajo la cual caen los objetos Juan, Felipe, etc., es el conjunto de los pares ordenados: (Juan, lo verdadero), (Felipe, lo verdadero), (La Luna, lo falso), etc.; este conjunto de pares será, como todo conjunto fregeano, la extensión de un concepto F(x). Y la extensión de un concepto es justamente la clase de los objetos que tienen cierta propiedad; es decir, que caen bajo el concepto. Así pues, el conjunto de pares ordenados sería la extensión del concepto F(x) bajo el cual caen los pares ordenados. Pero esa extensión es un curso de valores y, aplicando nuevamente la tesis de que el curso de valores es un conjunto de pares ordenados, será el conjunto de los pares ordenados [(Juan, lo verdadero), lo verdadero], [Felipe, lo verdadero), lo verdadero], [(La Luna, lo falso), lo verdadero], [Felipe, lo falso[, etc. Y este conjunto será, a su vez, la extensión de un concepto G(x) bajo el cual caen los pares ordenados [(Juan, lo verdadero), lo verdadero],...[Felipe, lo falso], etc. Y así indefinidamente. Además, de acuerdo a la ley V, si el curso de valores de la función "x es un hombre" es igual a la extensión del concepto F(x), bajo el cual caen pares ordenados, bajo el concepto "*x* es un hombre" también caerán pares ordenados. Por consiguiente, suponer que el curso de valores de una función proposicional es un conjunto (en sentido fregeano) de pares ordenados nos lleva también a conclusiones contradictorias; como la de nuestro ejemplo en que el objeto Felipe, por ejemplo, cae bajo un concepto que tiene la misma extensión que otros conceptos bajo los cuales no cae; lo cual puede

mostrarse advirtiendo que mientras el par (Felipe, lo verdadero) es parte del curso de valores del primer concepto, el par (Felipe, lo falso) es parte de los cursos de valores de los otros conceptos.

3) Si entendemos el término 'conjunto' en *cualquier* otro sentido ajeno a Frege, tendría que aclararse y justificarse su uso para la exposición de las ideas fregeanas, y hasta donde sé, *ninguno* de los defensores de la tesis ha hecho algo semejante. Podría pensarse que el término 'conjunto' se está usando en sentido moderno. Pero actualmente no hay sólo una teoría de conjuntos; y en cada teoría los axiomas delimitan el comportamiento de los "conjuntos". Así pues, no dudo de que en alguno de esos sentidos pueda ser correcta la tesis de que los cursos de valores son conjuntos de pares ordenados, pero no consideraré este caso por carecer de elementos de juicio al respecto.

En resumen, en los usos del término 'conjunto' examinados, decir que el curso de valores de una función *es* un conjunto de pares ordenados resulta confuso o, incluso, acarrea contradicciones o alteraciones del sistema fregeano. Para sostener esta identificación debería aclararse el significado de 'conjunto', y parece que sólo la tercera alternativa puede proporcionar un sentido adecuado. En mi propia propuesta, una forma adecuada de enunciar la tesis de los pares ordenados podría ser en los siguientes términos: 'El curso de valores de una función es la vinculación entre argumentos y valores que puede *ser expresada* mediante cierto conjunto de pares ordenados', donde 'conjunto' debe usarse en algún sentido apropiado (por ejemplo, alguno de la primera o tercera alternativa antes mencionadas al analizar sentidos de 'conjunto'). Al parecer, esto es justamente lo que intentan decir varios de los expositores de la tesis; pero por lo visto, la imprecisión en su formulación ha llevado a obscurecer aún más la ya de por sí nada clara idea fregeana sobre los cursos de valores. No obstante, en la formulación que propongo, creo que dicha idea, al igual que la idea asociada de extensión, queda esclarecida en alguna media; y coincide con la interpretación que presenté ilustrándola con diagramas.

México, septiembre de 1987

ABSTRACT

This paper tries to clarify the Fregean notions *of function, concept, course of values, and extension.*

According to Frege, a function is the reference of an expression with gaps; the function itself also has gaps and yields an object when those gaps are filled. Each function has a course of values and different functions can yield the same course of values. Concepts are functions having one argument which yield the truth for those objects which fall under the

concept and which otherwise yield the false. The extension of a concept is its course of values.

According to my interpretation, a Fregean function behaves like a skeleton that connects the objects that fill the gaps with the objects that arise when the gaps are filled. Therefore, one can say that a function is a mode of connecting objects, and the course of values is the connection itself, taken as a Fregean object. On these terms, a concept is a mode of connecting objects with truth-values, and its extension is the connection itself; in other words, a concept is a way of grouping objects (those that fall under the concept) and the extension is the grouping or "set" that is defined by that way of grouping objects.

BIBLIOGRAFIA

Angelelli, Ignacio:
1. *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosphy*, Dordrecht Holland, D. Reidel Publishing Company, 1967.
Birjukov, B.V.:
1. *Two Soviet Studies on Frege*, Dordrecht, 1964.
Burge, Tyler:
1. "Frege on extension of concepts from 1984 to 1903" en *The Philosophical Review*, xciii, no. 1, January 1984.
Dummett, M.A.:
1. *Frege Philosophy of Language*, London, 1973.
2. *The Interpretation of Frege's Philosophy*, London and Cambridge Mass., 1981.
Frege, Gottlob:
1. *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy* edited by Brian Mc. Guinness, Glasgow, Basil Blackwell, 1984.
2. *Conceptografía, Los fundamentos de la aritmética, y otros estudios filosóficos*, traducción de Hugo Padilla, México, UNAM, 1972.
3. *Die Grundlagen der Arithmetik*, Hildesheim, Germany, 1961.
4. *Fundamentos de la aritmética* (con un estudio de Claude Imbert), traducción de Ulises Moulines, Barcelona, Editorial Laia, 1972.
5. *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1980.
6. *Estudios sobre semántica*, traducción de Ulises Moulines, Barcelona, Ediciones Ariel, 1971.
7. *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* edited by Peter Geach and Max Black, Oxford, Basil Blackwell, 1970.
8. *The basic Laws of Arithmetic*. Translated and edited with an Introduction by Mongomery Furth, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1964.
9. *Posthumous Writings*, Oxford, Basil Blackwell, 1979.
Haaparanta L. and Hintikka J. (eds):
1. *Frege Synthesized*, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, D. Reidel Publishing Company, 1986.
Klemke E. D. (ed):
1. *Essays on Frege*, Urbana Chicago and London, 1968.
Parsons Terence:
1. "Why frege should not have said "the concept horse is not a concept"?", *Mathem-tical Research:* Frege Conference, 1984, proceedings of the international conference held at Schwerin (GOR), Sep. 10-14.
Orayen Raúl:

1. *La Ontología de Frege*, Universidad Nacional de la Plata, Argentina, 1970, vols. 3 y 4.
Resnik M.D.:
1. *Frege an the Philosophy of Mathematics*, Ithaca, 1980.
Rosado Haddock:
1. *Exposición Crítica de la Filosofía de Gottlob Frege*, República Dominicana, 1985.
Schirn Matthias:
1. *Studien zu Frege*, Frommann Holzboog, vol. I y II.
Sluga H.:
1. *Gottlob Frege*, London, 1980.
Valdivia Lourdes:
1. "Lo indecible en Frege" en *Análisis Filosófico*, IV, Nº. 1, 1984, Buenos Aires.
2. "Lo indecible y sus raíces categoriales en la teoría de Frege" en *Lógica y Filosofía del Lenguaje*, compiladores S. Alvarez, F. Broncano, M.A. Quintanilla, Salamànca, Ediciones Universidad de Salamanca, 1986, vol. II.
Wright C.;
1. *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen, 1983.
2. Editor for the special issue: *Frege*, en *The Philosophical Quarterly*, vol. 34, Nº. 136, July 1984.