GENTZEN Y LA NATURALIDAD DE LA DEDUCCION*

ALBERTO MORETTI

Muchas veces se han privilegiado diversos sistemas lógicos frente a otros, arguyendo que los caracteriza su mayor proximidad respecto de la práctica efectiva de los razonadores competentes. En general se ha buscado mostrar que esos sistemas rescatan las intuiciones lógicas básicas de quienes razonan con cierta habilidad.

En esta comunicación ejemplificaremos el tipo de dificultad que esos intentos suelen enfrentar y arrojaremos dudas sobre la posibilidad de superar tales inconvenientes en medida satisfactoria. Digamos de paso que si se plantearan estas cuestiones en el marco de la distinción chomskiana entre estructuras superficiales y profundas (si, por ejemplo, se buscase una función selectora innata correspondiente a la "competence" lógica ideal) podrían caer muchos de esos argumentos bajo el cargo de apelar a intuiciones superficiales (i.e. intuiciones dependientes de reglas de estructura superficial).

I

Como es sabido, un objetivo cuyo logro incumbe a la lógica es el de elucidar la noción corriente de *corrección*. La estrategia frecuente consiste en definir algún lenguaje artificial (más precisamente, un conjunto de fórmulas) donde, a su turno, sea posible definir una relación (la validez) de la que pueda esperarse que refleje del modo más adecuado el concepto intuitivo de corrección (al menos para vastas regiones de su empleo). Un requisito mínimo viene dado por la aproximación extensional: se buscará que el correlato en el lenguaje natural de la extensión de la relación de validez sea

* Leído el 26 de mayo de 1983 en las primeras Jornadas de Epistemología y Metodología de la ciencia organizadas por la Maestría en Metodología de la Investigación de la Universidad de Belgrano.

tan próximo al conjunto de los razonamientos correctos como lo permitan las consideraciones de sistematicidad y fertilidad de la teoría lógica.

Dos caminos alternativos suelen seguirse para cumplir este requisito. Uno de ellos consiste en definir la validez en base al concepto semántico de verdad; el otro procede mediante la noción sintáctica de derivación (los símbolos '$\models$' y '$\vdash$' para la validez, indican respectivamente la alternativa elegida). Naturalmente será un desideratum que ambas vías produzcan idéntico resultado, esto es, que $\models$ y $\vdash$ sean extensionalmente equivalentes. De hecho, esto puede probarse para los sistemas lógicos usuales.

La vía sintáctica puede dar lugar a la construcción de un sistema axiomático o de un sistema de solas reglas inferenciales. Ahora bien, si se exigiese que la elucidación propuesta, además de cumplir el requisito mínimo anterior, se elaborase de modo que exhiba en el mayor grado asequible las pautas lógicas que gobiernan la construcción normal de los razonamientos, entonces parece preferible que el resultado sea un sistema de reglas "naturales" de inferencia.

Se cree también que los lógicos han de ocuparse sólo de los rasgos formales de la corrección y que, por tal motivo, los únicos significados que habrán de atender son los asociados con los signos lógicos. A este respecto, muchos han pensado que en el análisis de tales significados hay buenas razones para relegar la noción de verdad en beneficio de la idea de inferencia. Las antiguas tribulaciones sobre eventos futuros contingentes y las nuevas advertencias conceptualistas sobre la verificabilidad de ciertas oraciones matemáticas, dan sustento a esa idea.

2

El extraordinario trabajo que G. Gentzen publicara en 1934 recoge las tres intuiciones mencionadas. Su sistema pretende dar cuenta de los aspectos formales del razonamiento matemático correcto a través de un conjunto de reglas inferenciales que permitan construir derivaciones de la manera más próxima a la forma como efectivamente proceden los matemáticos. Al mismo tiempo, serán esas mismas reglas las que determinen el sentido de los signos lógicos intervinientes.

El sitema plantea dos reglas para cada signo. Una regla determina el modo como puede aparecer el signo dado en una conclusión cualquiera (regla de introducción), la otra regla establece el mecanismo por el cual se consigue que estando en las premisas no aparezca en la conclusión (regla de eliminación). Gentzen pensaba que la regla de introducción es la fundamental: "las introducciones representan, por decir así, las 'definiciones' de los signos a los que conciernen, y las eliminaciones no son, en último análisis, más que consecuencias de esas definiciones". No juzgaremos aquí la exactitud de este aserto. Basta indicar que se pretende que las eliminaciones estén estrechamente ligadas al sentido otorgado por las introducciones. Llamaremos a esto una intuición de sistematicidad. La sistematicidad en general es, si se quiere, una intuición de un tipo más "elevado" que el ejemplificado por las anteriores aquí consideradas. Cuando se la piensa no sólo como una condición de las teorías sino con referencia a la realidad estudiada, se trata de una conjetura acerca de la estructura de esa realidad. En el caso que nos ocupa se traduce en la idea de que hay una conexión fuerte entre la justificación de la aparición de un signo y la justificación de su omisión. Aún cuando no se hablase de este modo, la sistematicidad es uno de los rasgos que contribuyen a la fertilidad de una elucidación.

El resultado de este proceder es el hallazgo de mayor naturalidad en la lógica intuicionista que en la clásica. Cuando se formulan las reglas de eliminación adecuadas (según el criterio anterior) a las reglas de introducción que parecieron más naturales, lo que se obtiene es un sistema equivalente al sistema axiomático intuicionista de Heyting. Gentzen señala que el cálculo clásico es obtenible agregando una nueva regla de eliminación de la negación pero observa que este regla no guardaría la correspondencia debida con la regla de introducción (i.e. violaría la intuición de sistematicidad).

3

En la lógica intuicionista los conectivos son independientes y, en particular, las leyes propias del condicional quedan caracterizadas por las tesis $(\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}))$ y $((\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})) \supset ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{C})))$.

Supongamos entonces un lenguaje sin conectivos al que incorporamos el condicional "definido" por las reglas de Gentzen.

$$(\supset \mathrm{I})\ \frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}} \qquad\qquad (\supset \mathrm{E})\ \frac{\mathcal{A} \qquad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

La demostración de $(\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}))$ procede así:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \qquad \mathcal{B}}{\mathcal{B}}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}}{\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})}$$

o bien

1	(1)	$\mathcal{B}$
2	(2)	$\mathcal{A}$
1	(3)	$\mathcal{B}$
1	(4)	$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$
	(5)	$\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$

Caben ahora dos observaciones. La primera es el uso tácito del principio de identidad. Su empleo, sin embargo, no resulta prima facie problemático, porque al no concernir específicamente a ningún signo lógico no quiebra la deseada sistematicidad. Juega del mismo modo que el principio, explícito en el sistema, de que una oración cualquiera se infiere a partir de una contradicción (con este principio, la formulación de Gentzen evita una incomodidad, relacionada con la introducción de la negación, que surge en otros sistemas posteriores de deducción natural).

La segunda observación es más importante y se resume en la pregunta por la justificación de la introducción del condicional en el cuarto paso de la prueba anterior. Su respuesta depende de cómo comprendamos la regla $\supset$I. Gentzen explica su sentido de la siguiente forma "traducido en palabras, este esquema corresponde a la deducción siguiente: si $\mathcal{B}$ *ha sido demostrado usando la hipótesis* $\mathcal{A}$, se tiene (ahora sin esa hipótesis) si $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{B}$" (subrayado nuestro). Dos cuestiones surgen aquí. Una referida a la interpretación de 'ha sido demostrado' cuando el conjunto de hipótesis es nulo (posibilidad contemplada por el esquema), asunto que no abordaremos directamente porque su mayor peso se vuelca en el otro problema, el planteado por el sentido general de 'demostrado' y por el alcance del solicitado recurso a la hipótesis para efectuar la demostración.

¿Cuál es la caracterización de la relación de deducción, $\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{B}$, cuando no hay signos lógicos en el lenguaje? Si en tal caso se incorpora el condicional mediante la regla explicada, ¿cómo entender la apelación a la existencia de una derivación de $\mathcal{A}$ hasta $\mathcal{B}$?. El concepto técnico de derivación depende esencialmente de la definición de un conjunto no nulo de reglas, en nuestro caso sólo habrá una (en rigor dos, contando $\supset$E), pero si ésta presupone aquella noción entonces resulta inaplicable y vacuo el concepto de derivación (tampoco será aplicable $\supset$E, aunque su sentido sea más claro).

En su trabajo, Gentzen describe un segundo tipo de sistema formal, que llama cálculo de secuencias, dentro del cual reformula su sistema de reglas de inferencia. Una vía de solución para el problema expuesto más arriba consiste en interpretar el cálculo de secuencias, en su parte estructural, como ofreciendo los rasgos básicos (*ie.* independientes de la introducción de los signos lógicos) de la idea de inferencia. Si esto se hace así, contamos con las siguientes reglas de atenuación:

$$(\mathrm{AA})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Delta} \qquad\qquad (\mathrm{AC})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \mathcal{A}}$$

La regla de atenuación tiene una fuerte intuición (semántica) en su apoyo: parece reflejar la idea misma de inferencia deductiva cuando se la opone a la de inferencia inductiva, esto es, la idea de que una inferencia deductiva válida no deja de serlo ante el agregado de nueva información cualquiera sea ésta.

Reformulando $\supset$ I del siguiente modo general

$$\frac{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Delta, \mathcal{B}}{\Gamma \vdash \Delta, (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})}$$

y considerando nulos los conjuntos Γ Δ, es obvio que

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}\,(AA)}{\vdash (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})}\,(\supset I)$$

De modo general resulta

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \mathcal{B}}\,(AC)}{\mathcal{A}, \Gamma \vdash \Delta, \mathcal{B}}\,(AA)}{\Gamma \vdash \Delta, (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})}\,(\supset I)$$

Esto asegura la demostración de $(\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}))$ y con ello la obtención de la lógica positiva del condicional. Por lo demás, es de este modo como procede tácitamente Gentzen, tal como surge, por ejemplo, de su aceptación de la definición hilbertiana de derivación.

Sin embargo, debemos recordar que la idea de derivación pretende ser un ajustado correlato de la noción intuitiva de demostración tal como queda parcialmente expresada en la cita anterior de Gentzen. Pero, según ese texto, hay un requisito de relevancia en la condición para introducir $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$: se pide que el antecedente haya sido efectivamente usado en la demostración de $\mathcal{B}$. Tenemos pues que, por un lado, el deseo de obtener la lógica positiva del condicional, junto con la intuitividad de la regla de atenuación, abogan en favor del empleo del cálculo de secuencias, y que, por otro lado, el sentido intuitivo de $\supset$ I entra en colisión con dicho recurso. Gentzen opta, implícitamente, por privilegiar lo primero; en los últimos años algunos lógicos han optado por la otra alternativa. Y ya que la regla de atenuación hace posible un sentido de $\supset$ I que no les parece intuitivo, se comprenderá que estos últimos nieguen que constituya una propiedad esencial de la derivación.

Aunque la elección implícita aludida soslaya –por inadvertencia– un conflicto de intuiciones, pone otro más en evidencia. El sistema de reglas "naturales" conduce a la lógica intuicionista y no a la clásica; sin embargo, cuando se atiende a la práctica deductiva que Gentzen efectúa "naturalmente" se ve que emplea la noción de inferencia que luego formaliza en el cálculo secuencial. Pero dentro de este cálculo la formulación de la lógica clásica no ofrece peculiaridades que afecten la simetría de las reglas que gobiernan los signos lógicos (como le ocurría en el sistema de deducción natural). La diferencia con la lógica intuicionista no depende de especificidades en dichas reglas, la distinción surge de un rasgo estructural más básico conectado con el alcance de la noción de inferencia subyacente. Y ahora, desde este punto de vista, es la lógica intuicionista la que para su construcción necesita imponer una restricción importante a la noción fundamental de secuencia: una secuencia intuicionista no puede tener más de una fórmula en el consecuente. Con esta perspectiva, la lógica clásica aparece reflejando un concepto amplio de inferencia, del que es un caso límite el correspondiente a la lógica intuicionista. Los cálculos clásicos satisfacen mejor, entonces, la que antes llamamos intuición de sistematicidad, sin violentar la intuición de simetría en la definición de los signos lógicos. Esto es así al menos en el nivel de análisis ofrecido por el trabajo de Gentzen.

La observación anterior se basa en las propiedades del cálculo de secuencias. El motivo explícito por el cual Gentzen desarrolló este cálculo fue la necesidad de obtener una demostración de su teorema fundamental para la lógica clásica ya que el cálculo natural sólo lo permite para la lógica intuicionista. Esto podría sugerir otra razón para tener la intuicionista como lógica más natural que la clásica. Conviene subrayar entonces que no fue éste el motivo por el cual se nos hizo plausible el recurso a secuencias. Tal enfoque resultó de la urgencia por proveer un modo de establecer las leyes intuicionistas del condicional. Tampoco fue, en consecuencia, un mero cambio de presentación. Debe destacarse, por otra parte, que venimos considerando un lenguaje cuya única conectiva es '$\supset$', pero si se contase con otros signos lógicos, por ejemplo '$\wedge$' y si para satisfacer la condición de relevancia bastase con la existencia de *alguna* derivación en que el antecedente se use efectivamente para derivar el consecuente, entonces cabría hacer, para resolver nuestra urgencia,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A} \qquad \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}}{\mathcal{B}}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}}{\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})}$$

No obstante, la discusión anterior reconocía la hipótesis de la independencia semántica de los conectivos, y en tales circunstancias este argumento no es aplicable.

La situación global, expresada de un modo algo tosco, es la siguiente: si pasamos por alto la intuición de relevancia, entonces Gentzen no da motivos para pensar que la lógica intuicionista sea más natural que la clásica, y hasta parece darlo para inclinarse por la opinión contraria (intuiciones de simetría y sistematicidad), y si atendemos cuestiones de relevancia, entonces ni la lógica clásica ni la intuicionista resultan naturales. La moraleja, una vez más, parece ser la de que no es sensato pretender que las reconstrucciones racionales de *un* concepto básico recojan en *una sola* noción rigurosa *todas* las intuiciones conectadas con su uso.

CONSEJO NACIONAL DE INVESTIGACIONES
CIENTIFICAS Y TECNICAS

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, A. R. & BELNAP, N. D. *Entailment*, vol. I, Princeton University Press, 1975.

GENTZEN, G. "Untersuchungen über das Logische Schliessen" *Mathematische Zeitschrift*, 1934.

HAACK, S. *Deviant Logic*, Cambridge, University Press, 1974.

TARSKI, A. "On the concept of logical consequence" en Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, Clarendon, 1956 (original en polaco, 1936).